

Une physique sans postulat

Hervé Le Cornec, herve.le.cornec@free.fr, © 2020, 2021, 2022

Avertissement : ce document est en cours d'écriture, il n'est pas achevé. Il prend cependant date publiquement des éléments qu'il contient.

Résumé : *Cherchant à établir un socle commun sans postulat pour les différents domaines de la physique, nous présentons les conséquences mathématiques et physiques de deux lois empiriques indiscutables : la « loi de non ubiquité » qui stipule qu'il n'est pas possible de mesurer un système simultanément dans deux états physiques différents, et la « loi des intervalles bijectifs » qui stipule que toute trajectoire peut être décomposée en une succession d'intervalles dans lesquels la position et le temps sont liés par une bijection. La première de ces lois permet de prévoir la quantification de la nature observée expérimentalement, tandis que la seconde simplifie le calcul lagrangien et aboutit à des équations du mouvement simplifiées. Appliquant ces équations à différents domaines nous voyons apparaître les lois emblématiques de la physique (Relation de Planck-Einstein, lois de Kepler, équations de Maxwell, entropie de Boltzmann, ...). Une telle démarche sans postulat semble donc possible, c'est ce qu'espère démontrer ce travail.*

Table of Contents

1	Introduction.....	4
2	Fondations.....	5
2.1	Introduction.....	5
2.2	Représentation des systèmes par le langage mathématique.....	5
3	Quantification.....	7
3.1	Introduction.....	7
3.2	Démonstration de la structure quantique de l'univers.....	7
3.3	Minimum d'action, constante de Planck.....	9
3.4	Quantification de l'espace, hypothèse de de Broglie.....	10
3.5	Approximation du lagrangien.....	11
3.6	A l'intérieur du quantum de temps.....	12
3.7	Intérêt de la mécanique quantique.....	15
3.8	Mesure et interaction.....	15
4	Mécanique analytique de la particule.....	16
4.1	Introduction.....	16
4.2	Dépendances de la vitesse, de la position et du temps.....	17
4.3	Loi des intervalles bijectifs.....	18
4.4	Conséquences sur le lagrangien.....	19
4.5	Variation à une dimension dans un intervalle bijectif.....	20

4.5.1	Variation.....	20
4.5.2	Conservation de l'énergie.....	21
4.5.3	Force et masse.....	21
4.5.4	Travail.....	22
4.5.5	Lagrangien.....	22
4.6	Variation à trois dimensions dans un intervalle bijectif.....	23
4.6.1	Variation.....	23
4.6.2	Conservation de l'énergie.....	24
4.6.3	Rotation, conservation du moment cinétique.....	25
4.6.4	Matrice de masse.....	26
4.6.5	Lagrangien, masse et force de Lorentz.....	26
4.7	Superposition des intervalles bijectifs.....	28
4.8	Succession d'intervalles bijectifs.....	28
4.9	Universalité de la mécanique analytique.....	29
5	Mouvement keplerien.....	30
5.1	Introduction.....	30
5.2	Lois de Kepler.....	30
5.3	Théorème de la cinématique keplerienne.....	32
5.4	Conséquences du théorème de la cinématique keplerienne.....	33
5.4.1	Lagrangiens, travail et énergies.....	33
5.4.2	Principe d'équivalence de Galilée.....	34
5.4.3	Ionisation.....	34
5.4.4	Postulat d'attraction de Newton.....	34
5.4.5	Caractéristiques du mouvement.....	35
5.4.6	Niveaux d'énergie.....	35
5.4.7	Chute des corps.....	36
5.4.8	Superposition d'une accélération mécanique.....	37
5.4.9	Principe d'équivalence d'Einstein et relativité générale.....	37
5.4.10	Rotation des galaxies.....	38
6	Atome d'hydrogène keplerien.....	40
6.1	Introduction.....	40
6.2	Caractéristiques kepleriennes.....	41
6.3	Apesanteur, relativité, charge et moment magnétique.....	42
6.4	Quantification.....	45
6.5	Énergie.....	45
6.6	Ionisation des atomes.....	46
7	Approche par le champ, électromagnétisme.....	47
7.1	Introduction.....	47
7.2	Caractéristiques du champ.....	48
7.3	Force de Lorentz.....	48
7.4	Équations de Maxwell et jauge.....	49
7.5	Pour aller plus loin.....	51
8	Thermodynamique.....	51
8.1	Introduction.....	51
8.2	Énergie libre de Gibbs et entropie de Boltzmann.....	51
8.3	Équilibre chimique.....	52
8.4	Désintégration radioactives.....	53
8.4.1	Cinétique générale.....	53
8.4.2	Désintégration bêta.....	53
8.5	Cinétique chimique.....	54

8.6 Pour aller plus loin.....	55
9 Conclusion.....	55
10 Bibliographie.....	56

1 Introduction

Loin de nous la volonté de présenter ce travail comme la proposition d'une nouvelle physique qui remplacerait toutes les autres. Il n'est absolument pas question de cela.

Les physiques modernes (mécanique classique, mécanique quantique, relativité générale, ...) ont prouvé leur valeur et il n'est donc nullement question de les remettre en cause. Cependant chacune d'elles est basée sur un ou plusieurs postulats (principe de moindre action, superposition des fonction d'ondes, principe d'équivalence, ...) et s'applique seulement dans un domaine et à une échelle dans lesquels les autres physiques sont inapplicables. Elles sont donc difficile à réconcilier.

Il nous est apparu intéressant de regarder si le problème de leur coopération aux limites de leurs domaines d'application ne pourrait pas provenir de leurs postulats de base, au moins en partie. Le problème qui se pose alors est que ces postulats sont le plus souvent incompatibles entre eux et résistent à toute coopération. Il apparaît alors une autre voie, celle d'un socle commun qui n'utiliserait aucun postulat mais qui pourrait agréger les différentes théories. Sans postulat car si nous soupçonnons ces derniers d'induire des défauts il est nécessaire de les éviter autant que faire se peut. Mais une telle théorie sans postulat, sorte de théorie idéale, est-elle possible à bâtir ? C'est une proposition de réponse à cette question qui est l'objectif du présent travail.

Chercher une physique sans postulat semble « naïf » au premier abord, tant on sait que nos connaissances actuelles sont insuffisantes pour tout expliquer sans utiliser un postulat à un stade ou un autre de la démonstration scientifique. Ceci est une évidence et c'est pourquoi nous ne cherchons pas ici à expliquer tous les comportements de tous les systèmes physiques de l'univers, mais seulement à observer quelles lois fondamentales peuvent être retrouvées sans postulat, par la simple logique scientifique mesurable et démontrable, et jusqu'à quel point on peut expliquer ainsi les résultats expérimentaux, avant de tomber sur le mur d'un postulat incontournable.

Encore faut-il ajouter que nous ne faisons ici qu'effleurer différents domaines de la physique, sans jamais entrer dans le détail. Nous pensons en effet qu'il faut aller du général au particulier, et le présent travail ne concerne que la première partie de ce projet sans postulat, les aspects généraux des grandes lois physiques (mécanique analytique, gravitation, électromagnétisme, quantification, thermodynamique, ...). Il méritera d'être enrichi à l'avenir en entrant dans le détail, si tant est que la communauté scientifique estime que cette démarche sans postulat puisse être intéressante à explorer plus avant.

Ce travail est ouvert à la critique car il inspirera peut-être au lecteur une autre façon de faire sans postulat, différente de celle proposée ici. Nous ne prétendons pas en effet qu'il n'existe qu'une seule voie pour écrire une théorie sans postulat, mais sans doute plusieurs, tout ou parties participant à des logiques cohérentes mais différentes. C'est sur ces différentes voies que nous espérons voir le débat s'engager.

2 Fondations

2.1 Introduction

La science consiste en la description du monde sans postulat. Un postulat est un énoncé indémontrable. C'est une opinion, un avis, dont rien ne permet de démontrer qu'il est vrai ni qu'il est faux. À peu près toutes les activités humaines sont basées sur des postulats, la religion, la politique, l'économie, l'art, ... La science est la seule activité où les postulats sont exclus, et c'est cela qui la rend si spéciale par rapport aux autres. La science ne considère que ce qui est mesurable et démontrable.

Il ne faut pas confondre un postulat avec une loi, qui est une propriété physique objectivement mesurée dans la nature, qu'on comprenne son existence ou pas, comme les lois de Kepler par exemple. Il faut encore moins le confondre avec un théorème qui est un énoncé démontrable objectivement, comme le théorème de Pythagore par exemple. Lois et théorèmes sont donc acceptés par la science, ce qui n'est pas le cas du postulat en toute rigueur.

Voilà pour la théorie, mais en pratique il est bien difficile de progresser en science sans poser de postulat, et de fait notre physique en est truffée : principe de moindre action, principe de superposition, principe d'équivalence, second principe de la thermodynamique, attraction universelle, etc. Partant de cela, en toute rigueur nos théories de physique ne sont pas purement scientifiques, mais leurs apports à l'humanité sont immenses, ce qui compense ce défaut. Alors utilisons les postulats mais n'oublions jamais qu'une théorie peut toujours être critiquée et améliorée tant qu'elle embarque un postulat. Nous devrions sans cesse nous évertuer à remplacer les postulats par des lois ou des théorèmes afin de consolider nos théories et de les rendre purement scientifiques.

L'idéal serait une physique sans aucun postulat, mais est-ce une utopie ? C'est pour répondre à cette question que nous avons entrepris le présent travail.

Notre objectif n'est pas d'avoir réponse à tout, mais de voir si les lois les plus fondamentales qui ont été mesurées dans le comportement de la nature peuvent être retrouvées logiquement sans utiliser aucun postulat. Par exemple les lois de Kepler, le spectre de l'atome d'hydrogène, la charge électrique, les équations de Maxwell, l'entropie de Boltzmann, et bien d'autres choses encore. Et si nous ne parvenons pas à exclure tous les postulats, jusqu'où peut-on sans eux progresser dans la compréhension du monde ?

Bien sûr ce que nous allons exposer ici est relatif à un référentiel de laboratoire posé sur la planète Terre, galiléen, à trois dimensions d'espace et une de temps. L'existence de ce référentiel n'est pas à postuler car c'est celui qui est utilisé pour toute mesure physique, c'est dans ce cadre que se construit la science.

2.2 Représentation des systèmes par le langage mathématique

La physique propose que les systèmes puissent être modélisés par les mathématiques. En effet elle ne considère que des quantités mesurables, or ces dernières sont des objets parfaitement

adaptés à une manipulation par les mathématiques (addition, division, évolution dans le temps, ...). À la base de tout il y a donc une définition fondamentale des conditions de la physique : les propriétés d'un système pouvant être étudié en physique sont modélisable par une fonction mathématique, appelée lagrangien et généralement noté L , en référence à Joseph Louis Lagrange qui fut le premier à synthétiser cette définition dans son ouvrage « Mécanique Analytique »^[1].

A priori on ne connaît pas la forme ni la teneur de cette fonction mathématique, mais elle doit exister. En effet chaque scientifique mesurant l'évolution de la valeur d'un paramètre physique (position, nombre, température, volume, cours de la bourse, ...) par rapport au temps obtiendra un graphique dont l'ordonnée est la valeur mesurée, et l'abscisse est le temps. Or les mathématiques nous expliquent comment modéliser une telle courbe par des polynômes ou encore des transformées de Fourier, et nombre d'autres choses exotiques, même sans rien savoir de ce qui la produit. L'existence du lagrangien n'est donc pas un postulat, mais une conclusion logique. Le poser est simplement une déclaration préalable expliquant que le langage officiel de la physique, celui dont elle se sert pour décrire l'univers, ce sont les mathématiques, car elles prévoient en elle même de donner une formulation unifiée et logique à chaque série de mesure par rapport au temps.

Il faut rappeler ici que les mathématiques sont un langage, mais pas une science à proprement parler. Par conséquent comme avec tout langage, en utilisant les mathématiques on peut écrire de la science ou de la science-fiction, et l'utilisation des mathématiques n'est donc pas en elle même la garantie d'un récit scientifique. C'est d'ailleurs tout le propos de la physique de se demander pourquoi, parmi les infinies possibilités qu'offrent les mathématiques, la nature n'en choisit que certaines, peu nombreuses et particulières. Pourquoi par exemple n'utilise-t-elle que le mouvement keplerien pour tous les astres de l'univers, alors que les mathématiques offrent une infinité d'autres sortes de trajectoires possibles.

Quoi qu'il en soit nous décrivons le lagrangien L comme la fonction mathématique modélisant les propriétés physiques d'un système. À ce stade initial de notre réflexion nous n'avons aucune idée de la forme que doit prendre cette fonction, mais les résultats expérimentaux nous montrent qu'elle doit exister. Par convention ce lagrangien possède la dimension d'une énergie. Il s'en suit que pour exister a minima un système élémentaire doit posséder un lagrangien non nul, c'est à dire une énergie non nulle. La plus petite fonction de ce type est une constante, aussi petite soit-elle, mais non nulle. Ainsi le système le plus élémentaire qu'on puisse envisager dans l'univers sera caractérisé par le lagrangien L_0 défini comme suit :

$$L_0 = \text{constante} \neq 0 \quad (1)$$

Ceci est la condition minimale d'existence physique dans l'univers.

Si la première formule mathématique de ce travail concerne l'aspect le plus élémentaire de notre univers c'est parce qu'il nous apparaît que c'est l'échelle que nous devons étudier en premier lieu. C'est en effet elle qui structure tout ce qui sera construit à plus grande échelle. En effet les particules élémentaires font les atomes, qui font les molécules, qui font les cristaux, qui font les minéraux, qui font les montagnes, etc. Bref, les petits ruisseaux font les

grandes rivières. Le prochain chapitre concernera donc l'aspect quantique du monde, c'est à dire son échelle la plus infime, que la mesure nous a amplement révélée.

3 Quantification

3.1 Introduction

Lorsque nous sommes parvenus à observer et manipuler les systèmes physiques à l'échelle subatomique, il a bien fallu constater l'existence des quanta. C'est Einstein, reprenant les travaux de Planck, qui postulat l'existence d'un quantum d'action (nous en verrons plus loin la définition), la constante de Planck, pour expliquer l'effet photo-électrique à partir du raisonnement de Planck sur le rayonnement du corps noir. Ce résultat était inattendu car la physique de l'époque, la mécanique classique, ne pouvait en rien prévoir que l'action puisse être quantifiée. Il fallut donc bâtir une nouvelle physique qui permettrait de rendre compte de ce phénomène, ce fut la mécanique quantique. Depuis cette époque la physique classique et la mécanique quantique sont deux théories qui s'excluent l'une l'autre, la première expliquant l'échelle macroscopique sans quanta, l'autre l'échelle microscopique à l'aide des quanta. Pourtant ces deux échelles participent du même univers et il doit bien exister un pont entre elles qui puisse être modélisé par une théorie de physique commune, d'où de nombreuses recherches toujours menées actuellement pour comprendre la limite classique de la mécanique quantique.

Mais ne sommes nous pas allés trop vite en besogne en considérant que la physique classique n'est pas capable de prédire la quantification du monde physique ? Une réponse non postulée à cette question est nécessaire, qu'on démontre effectivement que l'introduction des quanta y est impossible, ou au contraire qu'on démontre qu'elle est capable de rendre compte de la quantification.

C'est l'objet du présent chapitre. Nous allons y démontrer que la physique classique est structurellement quantifiée à son échelle la plus microscopique, et qu'elle s'accorde fort bien avec la mécanique quantique pour ce qui est des propriétés fondamentales des systèmes à cette échelle.

3.2 Démonstration de la structure quantique de l'univers

Il existe une loi fondamentale dans l'univers : on n'a jamais mesuré un système dans deux états différents simultanément. Immobile et en mouvement, vivant et mort, à Paris et à Marseille, toujours au même instant, ce sont des choses impossibles. Nous l'avons amplement mesuré.

Notons que sur ce point la mécanique quantique est elle aussi parfaitement d'accord. Si elle fait le postulat indémontrable de superposition des états physiques pour tout système, elle énonce aussi que la mesure ne sélectionnera toujours qu'un seul de ces états, jamais plus.

Nous posons donc la loi empirique suivante :

Loi de non ubiquité :

Il est impossible de mesurer un système physique dans deux états différents simultanément. (2)

Bien que cette loi soit d'aspect trivial et évident, ses conséquences sont importantes. En effet prenons le cas d'une boule de billard immobile, qu'on met en mouvement par un choc. Elle passe de l'état « immobile » à un instant t_0 , à l'état « en mouvement », à un instant ultérieur t_1 . Mais comme il est impossible de mesurer cette boule dans les deux états simultanément il est nécessaire que $t_1 \neq t_0$, c'est à dire que $\Delta t = t_1 - t_0 \neq 0$. Il existe donc toujours un intervalle de temps Δt non nul entre deux états d'un système physique, c'est à dire que le temps semble quantifié lorsqu'un système évolue d'un état à un autre.

Pour se faire une image de cela il suffit d'imaginer la boule de billard filmée par une caméra idéalement ultra rapide, aussi rapide qu'on puisse imaginer. Quoi qu'on fasse sur une image du film la boule sera immobile et sur l'image suivante elle aura bougé, sans qu'on puisse jamais mesurer ce qui se passe entre les deux.

On peut bien sûr considérer que le temps est absolu et continu, tandis que ce sont les états du système physique qui sont quantifiés. Cela n'effacera pas cependant que le système évoluera par quanta de temps Δt non nuls. C'est pourquoi, un peu par abus de langage il est vrai, nous dirons que le temps est quantifié pour un système physique donné.

A priori rien n'oblige Δt à être identique pour tous les systèmes, et on sait même que le temps étant relatif, comme l'a démontré Albert Einstein, la taille d'un quantum sera différente selon qu'on le mesure dans un référentiel fixe ou depuis un autre en mouvement relatif. Il est donc clair que la notion de quantum de temps ne peut pas être absolue. Rien ne nous porte à le croire en tout cas.

Il faut ici faire une remarque qui a trait au calcul infinitésimal, ou calcul différentiel, si utile et pertinent en physique et qui fut inventé simultanément par Leibnitz et Newton. Il est très courant en physique d'observer l'évolution d'une quantité par rapport au temps, et donc de définir la dérivée de cette quantité par rapport au temps. La définition de la dérivée \dot{x} d'une variable x en mathématique est la suivante :

$$\text{Dérivée de } x \text{ par rapport à } t : \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3)$$

Cette expression signifie que la dérivée est la valeur du rapport $\Delta x / \Delta t$ lorsque « t tend infiniment vers zéro, sans jamais y être égal ». Sans jamais y être égale car sinon la dérivée serait infinie. C'est une notion qui ne pose pas de problème en mathématiques où on peut postuler l'existence d'une telle limite « infiniment proche de zéro », mais elle ne peut pas appartenir à la physique car nul n'a jamais mesuré un système « tendant infiniment vers zéro », la notion d'infini étant irrecevable en physique puisque non mesurable. C'est alors que la quantification vient à notre secours. Pour la physique, à cause de la loi de non ubiquité, la dérivée sera donnée plutôt par la définition suivante :

$$\text{Dérivée de } x \text{ par rapport à } t : \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4)$$

où Δx et Δt sont des quanta, c'est à dire les quantités les plus petites possibles entre deux mesures les plus proches possibles physiquement l'une de l'autre.

A l'échelle macroscopique ces deux notions de dérivée, l'une mathématique et l'autre physique, se rejoignent et se confondent. C'est pour cela que l'étude des phénomènes physiques macroscopiques se satisfait si bien du calcul infinitésimal des systèmes.

Avec les résultat précédent on peut revisiter le paradoxe de Zénon, ou paradoxe d'Achille et la tortue. Achille et la tortue décident de faire une course de vitesse. Ils fixent une ligne de départ, une ligne d'arrivée, et Achille, grand seigneur, accorde une avance à la tortue car il se sent certain de la battre à plates coutures. La course est lancée, et Achille parcourt son retard en quelques secondes, mais pendant ce temps là la tortue a avancé elle aussi. Qu'à cela ne tienne, en un instant Achille parcourt cette même distance, mais pendant ce temps la tortue a une nouvelle fois avancé d'une petite distance. Et ainsi de suite, tant et si bien que Achille ne devrait jamais parvenir à doubler la tortue. Le calcul différentiel résout ce paradoxe en considérant qu'une suite infinie de nombres positifs doit converger vers une valeur finie. En revanche au regard de ce que nous venons d'exposer sur la quantification, nous aurons une autre explication, plus simple. En effet la longueur de la trajectoire de la tortue ne pourra être qu'un nombre entier d'enjambée de tortue λ_T , soit $n_T \lambda_T$ où n_T est un nombre entier. Il en va de même pour Achille dont la longueur de la trajectoire ne pourra être qu'un nombre entier d'enjambée d'Achille λ_A , soit $n_A \lambda_A$ où n_A est un nombre entier. À l'instant précédent le moment où Achille dépasse la tortue, on aura $n_A \lambda_A < n_T \lambda_T$, mais à l'instant suivant $(n_A + 1) \lambda_A > (n_T + 1) \lambda_T$, car l'enjambée d'Achille est bien plus longue que celle de la tortue, et Achille aura dépassé la tortue. Pour nous c'est donc la quantification des états physiques qui résout le paradoxe de Zénon.

3.3 Minimum d'action, constante de Planck

Maintenant que nous savons qu'un système ne peut évoluer que par quanta de temps, nous pouvons nous interroger sur ses propriétés lorsqu'il est élémentaire, c'est à dire lorsque son lagrangien reste constant au cours du temps, tout en étant d'existence minimale décrite par la formule (1). Pour cela il faut au préalable décrire ce qu'est l'action, généralement notée S . Par définition cette dernière est l'intégrale du lagrangien par rapport au temps :

$$\Delta S = S_1 - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} L_0 dt \quad (5)$$

Si l'étude ne se porte que sur un seul quantum de temps $\Delta t = t_0 - t_1$, alors on doit vérifier :

$$\Delta S = L_0 \Delta t \quad (6)$$

Cette expression de l'action est extrêmement importante car les mesures faites sur le monde subatomique révèlent qu'elle est omniprésente. En effet l'action ΔS possède une dimension d'énergie multipliée par un temps, c'est à dire qu'elle s'exprime en $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, ce qui est la dimension de la constante de Planck, usuellement notée h et dont la valeur est

$6,62607004 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. De plus l'inverse d'une durée est une fréquence, $\nu = 1/\Delta t$, ce qui nous permet finalement de réécrire la formule précédente de la façon suivante :

$$L_0 = h \nu \quad (7)$$

On reconnaît ici la relation de Planck-Einstein si utile en mécanique subatomique, car telle-ment vérifiée par l'expérience. Nous en déduisons donc que le minimum d'action possible dans notre univers, le quantum d'action, est la constante de Planck-Einstein. Il faut alors rendre à Planck et Einstein ce qui leur est dû : ne plus parler du postulat de Planck-Einstein, comme il arrive parfois, mais plutôt de la loi de Planck-Einstein, car au même titre que les lois de Kepler, si nous n'en comprenons pas les raisons de l'existence, cette loi a été largement vérifiée expérimentalement.

Notons cependant une particularité importante du quantum d'action. Contrairement au quantum de temps, qui est relatif au référentiel à partir duquel on le mesure, le quantum d'action, ou constante de Planck, semble le même dans tous les référentiels et serait donc universel. En tout cas c'est ce que semble nous dire la mesure.

3.4 Quantification de l'espace, hypothèse de de Broglie

Nous avons vu comment les quanta de temps et d'action sont liés ensemble, voyons maintenant que faire du quantum d'espace. Pendant le quantum de temps Δt un système élémentaire en mouvement parcourra le quantum d'espace Δx , nous permettant de calculer la vitesse v du système comme expliqué plus haut. Sachant que l'action s'exprime en $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, on voit qu'elle doit pouvoir s'écrire comme le produit d'une quantité de mouvement, généralement notée P et ayant pour dimension le kg m s^{-1} , et d'une distance. Ainsi au minimum d'action doit correspondre la quantité de mouvement suivante :

$$P = \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda} = \frac{L_0}{v} \quad (8)$$

Cette expression n'est autre que l'hypothèse de de Broglie, qui a ouvert la voie à la microscopie électronique par exemple. Ici encore il serait donc juste de parler de loi de de Broglie et plus d'hypothèse, tant cette formule a été validée expérimentalement.

Notons en passant la relation :

$$P v = L_0 \quad (9)$$

Nous la retrouverons plus loin, notamment sous forme vectorielle. En effet si nous travaillons en trois dimensions X, Y, Z au lieu d'une seule X , une solution de l'équation précédente est :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v} \quad \text{avec} \quad m = \frac{L_0}{v^2} \quad (10)$$

On voit donc apparaître le terme de masse m qui doit toujours exister, tant que ni L_0 ni v ne sont nuls. Ici la masse n'est cependant qu'une facilité mathématique sans réel contenu phy-

sique, si ce n'est en héritage de la signification physique du lagrangien L_0 . La masse n'est donc qu'une représentation particulière de l'énergie.

Au total nous voyons que la loi de non ubiquité impose la quantification de l'univers à son échelle la plus élémentaire et que les lois les plus fondamentales sont naturellement celles de Planck-Einstein et de de Broglie, conformément à ce qui a été mesuré expérimentalement. Pour l'instant notre approche semble donc cohérente, mais il reste tout de même une question intéressante : que se passe-t-il à l'intérieur d'un quantum de temps ?

3.5 Approximation du lagrangien

Comme nous l'avons dit plus haut, le lagrangien est une fonction mathématique décrivant les propriétés physiques d'un système. Nous ne connaissons pas cette fonction a priori, nous savons seulement que si les propriétés physiques d'un système sont constantes dans le temps, alors son lagrangien sera une constante, c'est d'ailleurs cette propriété que nous avons utilisée précédemment.

Cependant les mathématiques sont bonnes camarades car elles nous indiquent que toute fonction mathématique peut être approchée approximativement par un polynôme à coefficients constants, encore appelé développement limité. Par exemple une fonction $f(t)$ dépendant du paramètre t vérifiera toujours la formule suivante :

$$f(t) = \sum_{n=0}^N a_n (t - t_0)^n + \epsilon_0 \quad \text{avec } a_n = \text{cste} \quad \text{et } \epsilon_0 \rightarrow 0 \quad (11)$$

Le théorème de Taylor-Young explique que les coefficients constants a_n sont en fait relatifs aux dérivées d'ordre n de la fonction f . Quant au paramètre ϵ_0 il tend vers 0 lorsque t tend vers t_0 , mais plus vite, c'est à dire qu'on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\epsilon_0}{(t - t_0)^n} = 0 \quad (12)$$

L'expression du lagrangien en fonction unique du temps, $L = L(t)$, doit donc elle aussi suivre cette propriété géométrique fondamentale. On obtiendra donc une approximation correcte du lagrangien en utilisant la formule :

$$L(t) = L_0 + a_1 \Delta t + a_2 \Delta t^2 + a_3 \Delta t^3 + \dots \quad (13)$$

Reste à déterminer ce que valent les coefficients a_n qui dépendront du système et du phénomène considérés. Cependant en tout état de cause le plus petit polynôme possible, outre la valeur constante est

$$L(t) = L_0 + a_1 \Delta t \quad (14)$$

Il s'agit là du polynôme le plus élémentaire qui puisse exister. Dans ce cas le lagrangien est directement proportionnel au quantum de temps Δt .

Notez que rien n'interdit que le coefficient a_1 soit un nombre complexe, auquel cas le lagrangien le sera aussi, et seules leurs parties réelles nous seront accessibles à la mesure.

3.6 A l'intérieur du quantum de temps

Fondamentalement la nature est donc quantifiée, à cause de la loi de non ubiquité, et nous n'avons accès à la mesure d'un système qu'aux extrémités de son quantum de temps, par exemple seulement aux temps t_0 et t_1 dans le cas précédent de la boule de billard. Pourtant il faut bien que le système existe entre t_0 et t_1 , car il doit se propager du premier au second état. La question qui se pose est alors de savoir sous quelle forme est le système à l'intérieur du quantum de temps. Malheureusement la mesure y est impossible comme nous l'avons vu.

Il existe cependant un moyen d'en savoir plus sur les systèmes à l'intérieur de ce quantum de temps : l'expérience des fentes de Young. Dans son expression la plus simple elle consiste à envoyer des particules au travers un écran percé d'une ou deux fentes, et à regarder comment elles se répartissent derrière cet écran. La figure 1.a donne le schéma de cette expérience. Les particules sont lancées une par une pour qu'elles n'interagissent pas entre elles. Bien sûr les particules qui nous intéressent ici sont microscopiques : électrons, protons, atomes et même molécules, le résultat sera identique.

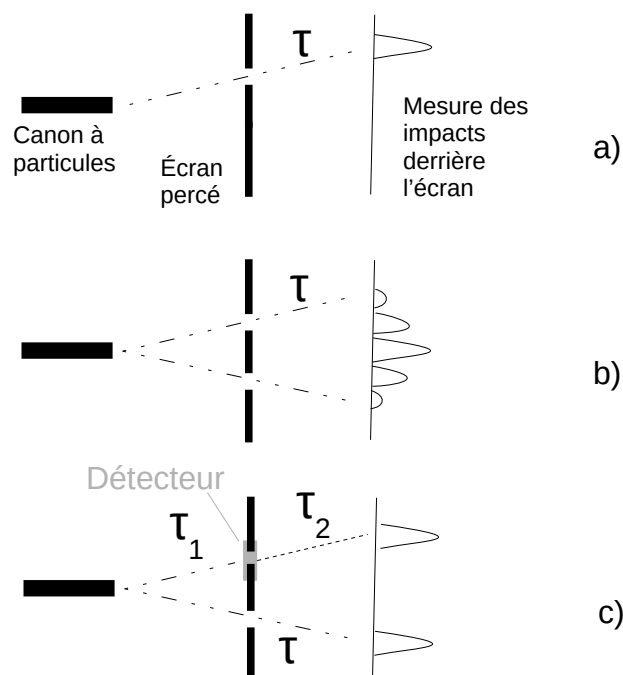


Figure 1: expérience des fentes de Young schématisée. En a) avec une seule fente ouverte, en b) avec les deux ouvertes, et en c) avec les deux ouvertes mais l'une d'entre elles est dotée d'un détecteur. Les courbes correspondant aux impacts derrière l'écran schématisent la densité des impacts en fonction de la position de ceux-ci. Le quantum de temps τ correspond au temps de vol de la particule entre deux mesures.

Le cas le plus simple est donné par la figure 1.a.a, il n'y a qu'une seule fente dans l'écran et on voit apparaître un seul pic d'impact derrière celui-ci, exactement comme si les particules se comportaient ainsi que des objets macroscopiques classiques, tels des balles de fusils par exemple.

En y regardant de plus près cette expérience consiste en deux mesures seulement : la particule est détectée à la sortie du canon, et à l'arrivée sur le détecteur derrière l'écran. Dès lors il n'existe qu'un seul quantum de temps τ entre ces deux événements.

Le cas le plus intéressant est donné par la figure 1.a.b, où deux fentes sont présentes sur l'écran. Le détecteur d'impacts montre alors une figure de diffraction typique d'une structure ondulatoire, bien loin du comportement d'objets classiques dont on s'attend à ce qu'ils ne produisent que deux pics, un en face de chaque fente. Puisque les particules sont lancées une à une, il faut que la particule interfère avec elle-même, et cela est parfaitement incompréhensible dans un monde macroscopique classique, car il faudrait violer la loi de non ubiquité. Nous constatons donc, sans en connaître la raison, qu'à l'intérieur du quantum de temps τ la particule est structurée comme une onde qui ne respecte pas la loi de non ubiquité. La figure 1.b donne la photographie réelle d'une telle expérience réalisée avec des électrons, au fur et à mesure de son avancement. Notons le caractère aléatoire et statistique du phénomène de diffraction qui est clairement visible, mais incompréhensible avec des particules classiques.

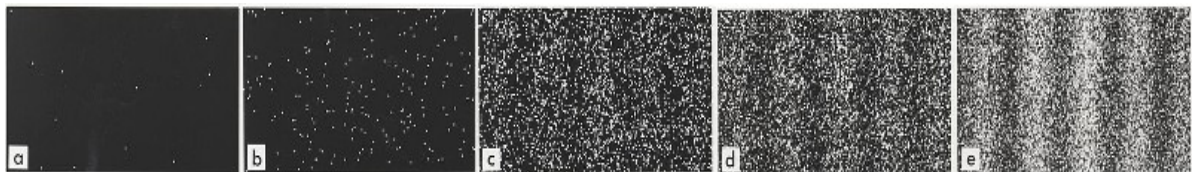


Figure 1 : expérience des fentes de Young avec des électrons^[15] à différents stades d'avancement. Au fil du temps on voit se constituer une figure de diffraction lorsque les 2 fentes sont ouvertes et non dotées d'un détecteur. L'image finale est constituée aléatoirement et statistiquement.

On peut néanmoins se demander si la particule passe réellement entre les deux fentes, ou bien au travers d'une seule à la fois, interférant d'une façon ou d'une autre derrière l'écran. On place alors un détecteur sur une des fentes et chaque fois qu'on détecte la particule, c'est qu'elle est passée par cette fente. On obtient le résultat de la figure 1.a.c : le comportement de la particule n'est plus ondulatoire, on obtient un pic en face de chaque fente, comme si la particule se comportait ainsi qu'un objet macroscopique classique. Aussi étrange qu'il puisse pa-

raître, ce résultat expérimental s'explique simplement par l'existence du quantum de temps séparant nécessairement deux mesures. En effet puisque le détecteur dans la fente effectue une mesure, le vol de la particule entre le canon et le détecteur derrière l'écran n'est plus parcouru au cours d'un unique et même quantum de temps, mais de deux quanta : le premier τ_1 du canon à la fente, le second τ_2 de la fente au détecteur final. Les deux fentes ne font plus partie de l'environnement parcourus au cours du même quantum de temps, chacune oblige la particule à emprunter des quanta de temps différents, et donc d'espace aussi. La particule n'est donc plus dans le même état physique selon le parcours qu'elle choisit, car elle emprunte des quanta d'espace différents, et dès lors elle ne peut plus interférer avec elle-même.

L'expérience est donc très claire : au sein d'un unique quantum de temps, et donc d'espace, séparant deux états la particule se comporte comme une onde emplissant l'espace. On peut néanmoins interagir sur elle de façon indirecte en lui mettant à disposition un espace matériel particulier (un écran avec des fentes par exemple, ou tout autre structure) pour obtenir un dessin de diffraction, à condition qu'elle puisse traverser cette espace matériel en un seul quantum de temps, c'est à dire sans jamais interagir avec un élément extérieur (mesure) d'un bout à l'autre de ce quantum.

L'expérience des fentes de Young nous montre donc qu'à l'intérieur du quantum de temps les particules atomiques et subatomiques possèdent une structure ondulatoire, et par conséquent qu'elle ne respecte pas la loi de non ubiquité. En effet, jetons une pierre au milieu d'un bassin d'eau, une onde concentrique se propage depuis le point de chute vers l'extérieur du bassin. On ne peut alors plus donner une position unique à l'onde, comme on peut le faire avec une particule, car elle emplit tout le bassin et possède donc simultanément toutes les positions contenue dans la surface du bassin. Une onde est donc un phénomène physique qui viole la loi d'ubiquité. On peut dire qu'une onde possède plusieurs états, car plusieurs positions, simultanément, qui peuvent même interférer entre eux, comme le montre l'expérience des fentes de Young.

Pourtant dans cette expérience, lorsque la particule est détectée sur l'écran de mesure, elle l'est sous forme d'une particule et pas d'une onde. Tout se passe comme si la mesure, donc l'interaction avec l'écran, transformait l'onde en particule. Cette dernière est détectée comme un point dans une bande de diffraction typique des ondes (voir figure 1.b). Sa probabilité d'apparition dans une bande donnée est proportionnelle à l'intensité de cette bande. Il s'en suit donc forcément que la position de l'impact sur l'écran possède un caractère probabiliste.

Peut-on pour autant affirmer que la particule sous sa forme ondulatoire est un objet structurellement probabiliste ? Peut-être, à condition de s'être bien assuré auparavant que l'expérience des fentes de Young ne comporte aucune autre liaison à l'aléatoire. En effet si le canon qui émet les particules ne les lance pas exactement dans le même état, mais dans une répartition aléatoire d'états autour d'une valeur moyenne, aussi proches soient-ils, on peut s'attendre à ce que ce facteur aléatoire initial soit visible sur l'écran de mesure.

Mais en tout état de cause l'expérience des fentes de Young nous montre une chose spectaculaire : le système sous sa forme ondulatoire, constitués de plusieurs états superposés, se transforme en une particule, dans un état unique, dès qu'on interagit avec lui, car on voit un point et un seul sur l'écran de mesure. La mesure changerait donc la structure de la particule.

3.7 Intérêt de la mécanique quantique

L'expérience des fentes de Young nous montre que la physique à l'intérieur du quantum de temps n'a rien à voir avec celles des états mesurés, elle semble même en être une antithèse. Les systèmes pourront y être dans plusieurs états simultanément, rendant impossibles des notions classiques telles que la position. Néanmoins leur mesure ne détectera qu'un seul état, cohérent avec l'univers classique. Ajoutons à cela que la figure 1.b nous montre le caractère probabiliste des particules dans leur état d'onde. En effet la figure de diffraction finale se constitue statistiquement avec un caractère aléatoire évident. Au final nous obtenons donc une description de la particule au sein d'un quantum de temps qui correspond très bien à ce qu'elle est en mécanique quantique (MQ).

La MQ sera donc d'une très grande utilité pour comprendre et manipuler les systèmes à l'intérieur des quanta de temps. Ce faisant nous pourrions d'ailleurs peut-être remplacer certains postulats fondateurs de la MQ par des lois expérimentales car les propriétés étranges des systèmes dans leur quantum de temps ont été largement constatées expérimentalement.

Cependant nous ne traiterons pas de ce sujet ici car la mécanique quantique est entièrement basée sur des postulats, or nous travaillons ici sans postulat.

3.8 Mesure et interaction

Peut-on mesurer les propriétés physiques d'un corps sans interagir avec lui ?

Pour répondre à cette question imaginons deux corps en mouvement dans un univers vide, où même les photons n'existent pas. Sans aucune particule d'interaction, les deux corps n'auront connaissance de l'existence de l'autre que s'ils se percutent. Bien évidemment cette mesure rudimentaire de l'existence de l'autre change l'état des deux corps, dont les trajectoires vont bifurquer comme des boules de billard se percutant. Qui sont alors l'observé et l'observateur ?

Imaginons maintenant qu'un des deux corps émette des photons, ces derniers vont soit se perdre dans l'univers vide, soit être absorbés ou réfléchis par l'autre corps. Dans ce dernier cas le corps émetteur recevra ses photons en retour et il pourra donc mesurer la position et même la vitesse relative de l'autre corps (effet Doppler). Mais ce faisant le corps émetteur aura perdu de l'énergie dissipée par les photons émis, son état aura donc changé. Quant à l'autre corps, il subit le choc des photons se réfléchissant et sa trajectoire en est modifiée, tandis que sa température change par absorption d'autres photons.

On peut considérer que dans ce schéma le corps émetteur de photon est l'observateur, mais on peut aussi considérer l'inverse. En effet le corps qui n'émet pas de photon est observateur de l'autre corps, qu'il voit comme un point lumineux (une étoile), qui le dévie par les photons réfléchis et qui le réchauffe par les photons absorbés. En définitive lequel observe l'autre ?

On voit que toute mesure doit modifier l'état de l'observateur comme celui de l'observé, mais pas forcément simultanément. Lorsque nous observons la lumière d'une étoile dont le photon a été émis il y a 100 millions d'années, l'état de certaines cellules de notre rétine change, tandis que l'état de l'étoile avait varié d'un photon il y a 100 millions d'années. Observateur et

observé ont changé d'état en cohérence pour permettre cette mesure, même s'il aura fallu 100 millions d'années pour accomplir le processus.

On peut cependant atténuer l'effet du changement d'état en considérant des corps dont l'échelle est bien supérieure à celle des particules d'interaction. Prenons l'exemple de boules de billard. Chaque joueur peut observer la position et la vitesse des boules grâce à la réflexion et l'absorption de la lumière ambiante sur ces dernières, aboutissant sur sa rétine. Éteignons maintenant la lumière, les joueurs ne peuvent alors plus mesurer aucune position ni aucune vitesse d'aucune boule. Rallumons la lumière, les boules sont de nouveau visibles, mais les photons qu'elles absorbent en surface changent leur température, et donc leur coefficient de frottement sur le tapis (les tapis de billard sont chauffés dans l'idéal, car plus les boules sont chaudes et mieux elles roulent). Bien sûr le réchauffement des boules est presque imperceptible car il a lieu à une échelle moléculaire négligeable au regard de la masse de la boule, mais il existe. On voit donc qu'en première approximation il est possible de négliger sur un corps macroscopique l'effet de la mesure opérée grâce à un faible nombre de photons. Mais si nous remplaçons la boule de billard par un atome, alors l'échelle du photon n'est plus négligeable, et l'atome subira un effet proportionnellement fort.

La mesure implique donc une interaction entre l'observé et l'observateur, chacun en subissant l'effet. Il nous faut donc considérer l'interaction plus en détail.

Si un corps pouvait être seul dans l'univers, il ne pourrait subir aucune interaction de quelque autre corps que ce soit. Ne subissant aucune force il se trouverait dans un référentiel galiléen, c'est à dire que sa vitesse ne pourrait être que de translation uniforme. Cependant, n'ayant aucun point de repère ce corps ne pourrait pas calculer sa vitesse. Il ne pourrait d'ailleurs pas non plus juger d'un quelconque écoulement du temps.

Pour modifier la trajectoire de ce corps il faudrait interagir avec lui, ce qui impose qu'il ne soit pas seul dans l'univers. L'interaction aurait pour effet de modifier la quantité de mouvement du corps en un temps donné, c'est à dire qu'il subirait une force. L'interaction provoque donc la force.

4 Mécanique analytique de la particule

4.1 Introduction

C'est Joseph Louis Lagrange qui fut le premier à proposer de retrouver les lois physiques que nous mesurons dans l'univers à partir d'éléments et de raisonnements mathématiques simples. C'est un travail absolument remarquable, toujours d'actualité, même si trop souvent on lui préfère aujourd'hui la formulation de Hamilton qui en est une variante.

Il nous apparaît cependant que ce travail peut être simplifié et factorisé, c'est ce que nous allons expliquer dans ce chapitre.

Dans ce qui suit nous appelons observable toute quantité physique q mesurable objectivement. A priori la valeur de cette quantité peut varier dans le temps, et par conséquent on pourra défi-

nir sa vitesse d'évolution $\dot{q} = dq/dt$, son accélération d'évolution $\ddot{q} = d^2q/dt^2$, et ainsi de suite. Dans le cas particulier de l'observable position le phénomène est dit mécanique. La vitesse et l'accélération d'évolution sont alors simplement la vitesse et l'accélération au sens courant du terme. Ceci étant dit par souci de simplicité nous parlerons toujours par la suite de vitesse simplement au lieu de vitesse d'évolution, quel que soit l'observable concerné.

Notons enfin qu'à tout observable doit correspondre un lagrangien, qui dans le cas mécanique possède certes la dimension d'une énergie, mais dans d'autres situation pourrait être d'une tout autre dimension. Ainsi lorsque nous parlons de « mécanique » analytique, nous entendons plutôt qu'il s'agit d'une « méthode » analytique. Une de ces méthodes est certes la mécanique, mais on peut en concevoir d'autres, et de toutes sortes.

4.2 Dépendances de la vitesse, de la position et du temps

Comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, Lagrange propose de considérer qu'une fonction mathématique doit être capable de modéliser les propriétés physiques d'un système, c'est le lagrangien L . Cependant nous ne connaissons pas la forme de cette fonction mathématique, il nous faut donc la manipuler pour voir ce qui en sort.

La première chose que propose Lagrange est de faire dépendre le lagrangien uniquement de trois variables indépendantes : la vitesse \dot{q} , la position q et le temps t :

$$L = L(\dot{q}, q, t) \quad (15)$$

Ceci paraît logique car la mesure a montré que le mouvement est toujours présent dans la nature et que la notion de repos absolu est une utopie jamais mesurée. Il s'en suit que les propriétés de temps, de position et de vitesse sont fondamentales pour tout système, indispensables pour exister.

Quant à l'indépendance de ces trois variables, elle paraît une évidence. En effet, je suis ici en ce moment, mais rien ne m'empêcherait d'être plutôt là bas au même instant. Ainsi la position et le temps sont indépendants. Quand à la vitesse, si j'ai une vitesse donnée en une position donnée, rien ne m'empêcherait d'avoir une autre vitesse sur cette même position. Ainsi la vitesse et la position sont indépendantes. On comprend donc bien avec ce raisonnement simple que le temps, la position et la vitesse doivent être des variables indépendantes.

Il y a pourtant un problème. Le raisonnement que nous venons de tenir ne fonctionne que par l'utilisation du conditionnel. Si nous le traduisons au présent de l'indicatif nous obtenons : je suis ici en ce moment, mais rien ne m'empêche d'être plutôt là bas au même instant. À l'évidence cette phrase est fautive car il serait nécessaire de violer la loi de non ubiquité. Il est donc

nécessaire de savoir si la physique peut se satisfaire de démonstrations au conditionnel, et sur ce point la réponse est non. En effet l'hypothèse conditionnelle « je pourrais être là bas au même instant » ne peut pas être mesurée, et par conséquent elle ne peut pas être prise en compte par la physique.

Nous allons démontrer dans ce qui suit qu'en réalité, loin d'être indépendants, la quantité mesurable et le temps sont toujours intimement liés, qui plus est par une bijection.

4.3 Loi des intervalles bijectifs

Il est très fréquent de mesurer l'évolution d'un paramètre physique au cours du temps : sismomètre, cours de la bourse, courbe de température d'un patient, trajectoire d'un mobile, etc. Toutes les courbes expérimentales obtenues pour un seul paramètre se ressemblent : il s'agit d'un graphique dont l'ordonnée est la valeur du paramètre mesuré, et l'abscisse est le temps. Mais ces courbes partagent surtout une propriété évidente et universelle : elles sont toujours constituées d'une succession d'intervalles dans lesquels la valeur mesurée et le temps sont liés par une bijection, que la courbe soit discontinue ou pas. La figure 2 décrit cette propriété.

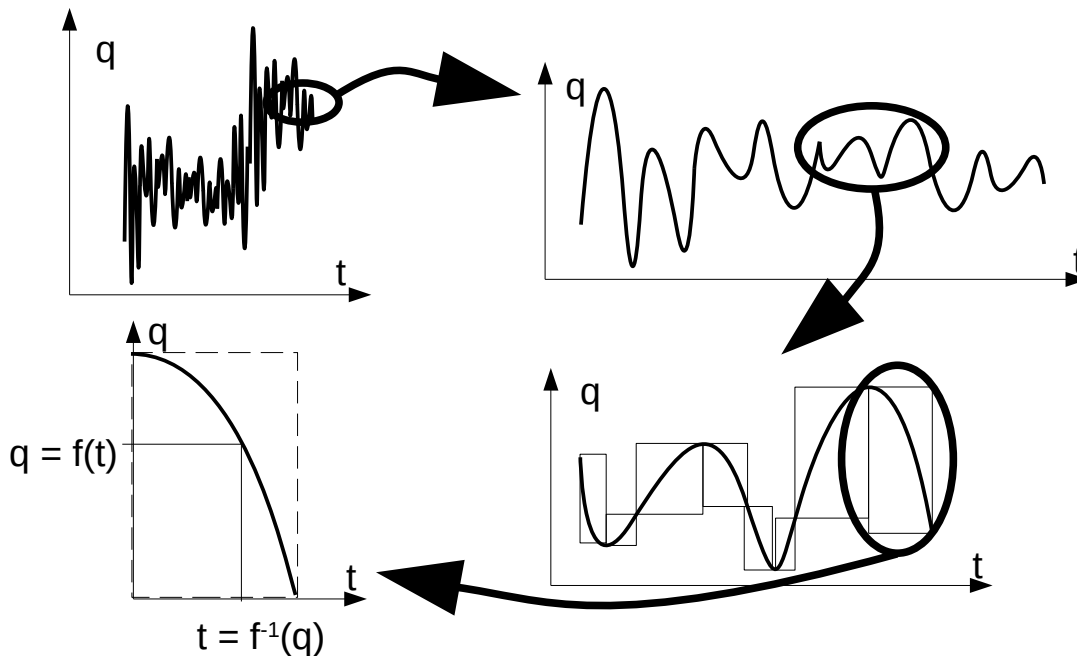


Figure 2 : toute série de mesure d'un paramètre physique par rapport au temps est représentable sous la forme d'une trajectoire dont l'abscisse est le temps et l'ordonnée la valeur du paramètre mesuré. Ces trajectoires sont toujours constituées d'une suite d'intervalles dans lesquels la valeur du paramètre et le temps sont liés par une bijection.

On voit donc qu'à tout moment la valeur mesurée se trouve dans un de ces intervalles, c'est à dire qu'à tout moment elle est reliée au temps par une bijection. Bien sûr cette bijection n'est pas forcément identique dans tous les intervalles, mais ce sera toujours une bijection. Cette propriété des mesure en fonction du temps est tellement universelle que nous pouvons en extraire une loi empirique. Posons donc la loi suivante :

Loi des intervalles bijectifs

Toute courbe de mesure d'un paramètre physique q en fonction du temps t est décomposable en une suite d'intervalles dans lesquels la valeur mesurée est liée au temps par une bijection $f : q = f(t)$ et $t = f^{-1}(q)$. Nous dirons que ces intervalles sont bijectifs. (16)

Bien sûr cette dépendance forte de l'espace et du temps aura des conséquences dans le calcul lagrangien aboutissant aux équations du mouvement.

4.4 Conséquences sur le lagrangien

Revenons à la mécanique analytique lagrangienne. Pour elle aussi la loi des intervalles bijectifs s'applique, et on comprend donc pourquoi c'était une erreur de postuler que la position et le temps sont indépendants, car en réalité la position d'un système doit toujours être liée au temps par une bijection. Cela doit toujours être le cas à l'intérieur des intervalles bijectifs décrits par la loi précédente, et à chaque instant le système se trouve dans un tel intervalle. Nous allons donc étudier les propriétés des mouvements à l'intérieur de ces intervalles.

Un grand intérêt de cette propriété de bijectivité est de nous apporter une simplification considérable des écritures mathématiques. En effet, en observant une quantité q , selon la loi des intervalles bijectifs q et le temps t doivent être liés par une bijection $q = f(t)$ et $t = f^{-1}(q)$, et puisque la vitesse doit être une fonction de la position et du temps $\dot{q} = g(t, q)$, on voit qu'il est possible d'écrire la vitesse sous deux formes mathématiques différentes, l'une uniquement dépendante du temps $\dot{q} = g(t, f(t)) = g_t(t)$, l'autre uniquement dépendante de la position $\dot{q} = g(f^{-1}(q), q) = g_q(q)$. Il en va alors de même pour le lagrangien (15) qu'on pourra écrire sous trois formes mathématiques différentes :

$$\begin{aligned} L(t, q, \dot{q}) &= L(t, f(t), g_t(t)) = A(t) \\ L(t, q, \dot{q}) &= L(f^{-1}(q), q, g_q(q)) = B(q) \\ L(t, q, \dot{q}) &= L(g_t^{-1}(\dot{q}), g_q^{-1}(\dot{q}), \dot{q}) = C(\dot{q}) \end{aligned} \quad (17)$$

Les lagrangiens A , B , C et L ont la même valeur. Ce sont des représentations mathématiques différentes dans leur écriture mais leur valeur est la même. Cependant le grand intérêt de A , B et C est qu'ils ne dépendent que d'une seule variable et par conséquent leur dérivation par rapport au temps ne fera apparaître que des dérivées totales, et plus partielles comme pour L . Cela produit un gros impact sur le calcul de variations que nous propose Lagrange.

4.5 Variation à une dimension dans un intervalle bijectif

4.5.1 Variation

Comme Landau & Lifchitz l'ont clairement exposé dans leur ouvrage « Mécanique »^[2], que nous allons suivre dans ce chapitre, Lagrange propose d'observer la variation de l'action d'un système, c'est à dire l'intégrale de son lagrangien par rapport au temps, lorsqu'il emprunte deux chemins différents mais très proches pour relier deux états fixes. La figure 3 illustre ce procédé.

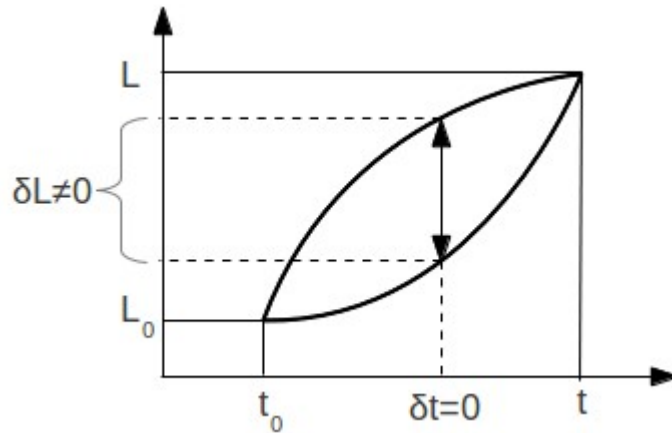


Figure 3 : un système de Lagrangien L_0 au temps t_0 évolue vers l'état de lagrangien L au temps t . Plusieurs chemins sont envisageables qu'on peut explorer en considérant une variation $\delta L \neq 0$ au même instant entre deux de ces trajectoires possibles.

Considérons l'observable q et son lagrangien correspondant $L = A(t) = B(q) = C(\dot{q})$. Son action S étant l'intégrale du lagrangien par rapport au temps, on doit avoir :

$$S - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} C(\dot{q}) dt = \int_{t_0}^{t_1} B(q) dt \quad (18)$$

Opérant une petite variation δq de q entre t_0 et t_1 , ainsi que sur la figure 3, nous pourrions écrire :

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} P \cdot \delta \dot{q} dt = [P \delta q]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dP}{dt} \delta q dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dB}{dq} \delta q dt \quad \text{avec } P = \left(\frac{dC}{d\dot{q}} \right) \quad (19)$$

Le paramètre P est appelé impulsion, ou quantité de mouvement. Puisque la variation de q doit être nulle en t_0 et t_1 , on en tire l'équivalent des équations du mouvement de Lagrange, en plus simple :

$$F = \frac{dP}{dt} = - \frac{dB}{dq} \quad (20)$$

La force F , définie comme la dérivée de la quantité de mouvement P par rapport au temps, dérive donc d'un potentiel $B(q)$. Cette conclusion est identique à celle issue du calcul de variation de Lagrange, au signe près, mais avec une différence notable: nous n'avons ici eu nul besoin d'utiliser le postulat de moindre action énonçant que la variation δS devrait toujours être nulle.

Il nous faut aussi faire une remarque importante. Pour obtenir l'équation du mouvement (20) nous avons supposé que $B=C$, mais en toute rigueur l'introduction d'une constante à cette égalité ne changera pas $\delta B = \delta C$. La relation la plus générale qui puisse exister entre B et C est donc :

$$C = B + \Gamma_0 \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 = \text{constante} \quad (21)$$

La constante Γ_0 possède la dimension d'un lagrangien, donc d'une énergie. Cette constante est a priori différente dans chaque intervalle bijectif, elle est caractéristique de l'intervalle.

4.5.2 Conservation de l'énergie

Calculons maintenant la dérivée des lagrangiens B et C par rapport au temps, et intégrons le résultat (20) :

$$\dot{C} = \dot{B} = P \ddot{q} = \frac{dB}{dq} \dot{q} = -F \dot{q} \quad (22)$$

On en tire :

$$P \dot{q} = E_0 = \text{constante} \quad (23)$$

E_0 est une constante avec la dimension d'un lagrangien, c'est à dire d'une énergie si l'étude est mécanique. Nous l'appelons « niveau d'énergie » du mouvement considéré. Tout système doit respecter la relation (23) lorsqu'il se trouve dans un intervalle bijectif. Nous retrouvons ici le concept de conservation de l'énergie.

4.5.3 Force et masse

La dérivation de l'impulsion par rapport au temps en utilisant la relation (23), mène à décrire la force de la façon suivante :

$$F = -\frac{E_0}{\dot{q}^2} \ddot{q} \quad (24)$$

Si j'appelle « masse » m le terme suivant

$$m = \frac{E_0}{\dot{q}^2} \quad (25)$$

La relation (24) devient $F = -m \ddot{q}$ tandis que la quantité de mouvement sera donnée par $P = m \dot{q}$.

Rien ne nous impose cependant que cette masse m soit une constante, sa seule contrainte est de respecter la relation (25), soit encore :

$$E_0 = m \dot{q}^2 \quad (26)$$

La masse n'est donc pas ici une propriété intrinsèque des corps naturels, mais seulement la définition d'un terme mathématique particulier. Ainsi par la définition mathématique (25) de la masse, cette dernière est intimement liée au carré de la vitesse. Lorsque le carré de la vitesse est constant, la masse doit être constante aussi car il faut vérifier la relation (23). Et si la masse est variable dans le temps, sa dérivée sera donnée par :

$$\dot{m} = -2m \frac{\ddot{q}}{\dot{q}} \quad (27)$$

4.5.4 Travail

Par définition le travail W , qui a la dimension d'une énergie, est l'intégrale par rapport au temps du produit de la force par la vitesse :

$$W = \int F \dot{q} dt \quad \text{donc} \quad \dot{W} = F \dot{q} \quad (28)$$

En dérivant l'équation (23) par rapport au temps on doit avoir $F \dot{q} + P \ddot{q} = 0$, ce qui est donc équivalent à écrire $\dot{W} + \dot{C} = 0$ et par suite on doit vérifier :

$$W + C = \Sigma_C = \text{constante} \quad (29)$$

On obtient la relation équivalente avec B en multipliant les deux membres de l'équation (20) par la vitesse, $F \dot{q} + (dB/dq) \dot{q} = \dot{W} + \dot{B} = 0$, pour obtenir finalement

$$W + B = \Sigma_B = \text{constante} \quad (30)$$

En tenant compte de la relation (21) existant entre B et C , on voit que les constantes Σ_C et Σ_B doivent être liées par la relation suivante :

$$\Sigma_C = \Sigma_B + \Gamma_0 \quad (31)$$

4.5.5 Lagrangien

Nous savons que la quantité de mouvement P ne peut dépendre que de la vitesse, car elle est la dérivée par rapport à la vitesse du lagrangien C , uniquement dépendant de la vitesse (voir les relations (17) et (19)). Par conséquent il est possible d'intégrer la relation (23) par rapport à la vitesse afin d'obtenir la forme mathématique du lagrangien. Il vient trivialement :

$$C = C_0 + E_0 \ln \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right) \quad \text{où } E_0, C_0 \text{ et } \dot{q}_0 \text{ sont des constantes} \quad (32)$$

On peut donc aussi écrire :

$$\dot{q} = \dot{q}_0 e^{\frac{\Delta C}{E_0}} \quad (33)$$

On peut encore préciser un peu plus cette équation de la vitesse dans le cas par exemple d'un lagrangien élémentaire. En effet d'une part nous avons vu au paragraphe 3.5 que sous sa forme la plus élémentaire le lagrangien est un polynôme en Δt de degré 1. D'autre part que le lagrangien puisse s'exprimer en fonction unique du temps a été démontré au paragraphe 4.4 : $L = A(t) = C(\dot{q})$. Par suite le coefficient du polynôme pouvant être un nombre complexe on aura :

$$\frac{\Delta C}{E_0} = \frac{\Delta A}{E_0} = (a + i b) \Delta t = (v \Delta t + \alpha) + i (\omega \Delta t + \rho) \quad (34)$$

Par suite la vitesse correspondante sera décrite par l'équation générale suivante :

$$\dot{q} = \left[\dot{q}_0 e^{\alpha + v t} \right] e^{i(\omega t + \rho)} \quad (35)$$

Et la quantité q sera donnée par :

$$q = \left[q_0 e^{\alpha + v t} \right] e^{i(\omega t + \rho)} \quad (36)$$

Dont la partie réelle est :

$$\Re(q) = \left[q_0 e^{\alpha + v t} \right] \cos(\omega t + \rho) \quad (37)$$

Telle doit être l'équation élémentaire à laquelle doit répondre tout mesurable à l'échelle quantique. Notons cependant que les vitesses s'additionnent et que le mouvement total peut donc être la superposition de N mouvements élémentaires de ce type. La série de Fourier par exemple correspond à l'addition de mouvements périodiques élémentaires compatible avec les équations précédentes.

4.6 Variation à trois dimensions dans un intervalle bijectif

4.6.1 Variation

Lorsqu'on souhaite étudier le mouvement des corps dans notre univers, il est nécessaire d'utiliser un espace à trois dimensions. Ainsi nous ne nous préoccupons plus d'un observable à une seule dimension mais d'observables à trois dimensions, comme par exemple le vecteur position désignant le lieu où se situe un corps par rapport à un référentiel. Ce référentiel est a priori arbitraire, car quel qu'il soit le module de tout vecteur en trois dimensions y aura la même valeur.

Menons donc le raisonnement du chapitre précédent en trois dimension et considérerons la variation du rayon vecteur \mathbf{r} d'un système, c'est à dire le vecteur reliant le centre du repère de référence, jusqu'à la position du système. Dans cette situation l'intégrale d'action s'écrira de deux façons notables :

$$S - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} C(\mathbf{v}) dt = \int_{t_0}^{t_1} B(\mathbf{r}) dt \quad (38)$$

Dans cette expression \mathbf{v} est le vecteur vitesse. Opérant une petite variation $\delta \mathbf{r}$ de \mathbf{r} entre t_0 et t_1 , nous pourrons écrire

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{v} dt = [\mathbf{P} \delta \mathbf{r}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \delta \mathbf{r} dt = \int_{t_0}^{t_1} \nabla B \delta \mathbf{r} dt \quad (39)$$

Dans cette expression ∇ est l'opérateur gradient tandis que le vecteur $\mathbf{P} = \left(\frac{\partial C}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial C}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial C}{\partial \dot{z}} \right)$ est défini comme la quantité de mouvement, ou impulsion. Puisque la variation de \mathbf{r} doit être nulle en t_0 et t_1 , on en tire l'équivalent des équations du mouvement de Lagrange, en plus simple :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\nabla B \quad (40)$$

La force \mathbf{F} , définie comme la dérivée de la quantité de mouvement \mathbf{P} par rapport au temps, dérive donc d'un potentiel $B(\mathbf{r})$. Cette conclusion est identique à celle issue du calcul de variation de Lagrange, au signe près, mais avec une différence notable: nous n'avons ici eu nul besoin d'utiliser le postulat de moindre action énonçant que la variation δS devrait toujours être nulle.

Comme pour le cas à une dimension, les lagrangiens B et C sont en réalités égaux à une constante près et la relation (21) est toujours valable : $C = B + \Gamma_0$ avec $\Gamma_0 = \text{constante}$

4.6.2 Conservation de l'énergie

Calculons maintenant la dérivée des lagrangiens B et C par rapport au temps, et intégrons le résultat (40) :

$$\dot{C} = \dot{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \nabla B \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (41)$$

Dans cette expression \mathbf{a} est l'accélération. On en tire :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = E_0 = \text{constante} \quad (42)$$

E_0 est une constante avec la dimension d'un lagrangien, c'est à dire d'une énergie. Nous l'appelons « niveau d'énergie » du mouvement considéré. Tout système mécanique doit respecter la relation (42). Nous retrouvons ici le concept de conservation de l'énergie.

4.6.3 Rotation, conservation du moment cinétique

Dans le paragraphe précédent nous avons mené le calcul de variation en considérant que le calcul infinitésimal, ou différentiel, convenait à notre raisonnement. Il existe cependant une situation dans laquelle la vitesse échappe à la possibilité d'utiliser le calcul infinitésimal, c'est la rotation.

En effet intégrer la vitesse par rapport au temps ne pose aucun problème en calcul différentiel :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^t d\mathbf{r} \quad (43)$$

En revanche intégrer une vitesse de rotation n'est pas aussi simple :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^t \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r} dt = \int_{t_0}^t d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (44)$$

L'intégration de cette seconde expression de la vitesse n'est plus du tout évidente.

En réalité nous tombons ici sur un défaut rédhibitoire du calcul infinitésimal : ce dernier considère que toute courbe peut être simulée par une succession de segments rectilignes, à condition que ces derniers soient suffisamment petits, et dans l'idéal tendre infiniment vers 0, mais sans être nul. Malheureusement si « tendre infiniment vers 0 » ne pose aucun problème en mathématiques, ce n'est pas un concept utilisable en science. En effet la notion d'infini ne pouvant être mesurée, elle ne peut pas être utilisée en physique. Cela est d'ailleurs d'autant plus vrai que nous avons vu qu'à son échelle la plus infime l'univers est forcément quantifié, et qu'un quantum ne peut pas être divisé, encore moins à l'infini.

En outre le périmètre d'un polygone simulant un cercle est un nombre fini, tandis que le périmètre d'un véritable cercle est un nombre irrationnel, car π est irrationnel. Aucun polygone ne pourra donc être strictement équivalent à un cercle. On le voit, de quelque côté qu'on prenne la rotation, elle se heurte au calcul infinitésimal.

La conséquence de l'aspect particulier de la rotation nous amène à penser que le calcul de variation auquel nous avons procédé précédemment doit être rejoué spécifiquement pour la rotation. Si nous imposons une rotation infinitésimale $\delta \boldsymbol{\theta}$ à un système de position \mathbf{r} et de vitesse \mathbf{v} , ces dernières vont varier de la façon suivante :

$$\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{v} = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v} \quad (45)$$

Les variations des lagrangiens B et C seront donc données par :

$$\begin{aligned}\delta B &= \nabla B \cdot \delta \mathbf{r} = \nabla B \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \nabla B) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta C &= \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{P}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}\end{aligned}\quad (46)$$

Puisque ces deux variations sont égales, et que nous connaissons la relation 40, nous arrivons à conclure qu'un système en rotation doit avoir un moment cinétique \mathbf{L}_0 constant :

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \text{constante} \quad (47)$$

Nous retrouvons ici la notion de conservation du moment cinétique.

4.6.4 Matrice de masse

Puisque la force est la dérivée de l'impulsion par rapport au temps, il est aisé de constater que la force peut s'écrire comme une matrice \hat{m} agissant sur l'accélération \mathbf{a} :

$$\mathbf{F} = \hat{m} \times \mathbf{a} \quad \text{avec} \quad \hat{m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} & \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{x} \partial \dot{z}} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{y}^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{y} \partial \dot{z}} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{z} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{z} \partial \dot{y}} & \frac{\partial^2 C}{\partial \dot{z}^2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Lorsqu'il existe une valeur propre m de la matrice \hat{m} , on obtient la seconde loi de Newton :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (49)$$

4.6.5 Lagrangien, masse et force de Lorentz

En travaillant à une seule dimension nous avons vu que l'intégration de la relation (23) est possible et nous mène à la détermination du lagrangien C (relation (32)). En trois dimensions l'intégration équivalente de la relation (42) n'est plus possible. Prenons en effet le cas simple où nous mesurons la quantité de mouvement telle que $\mathbf{P} = m \mathbf{v}$, il s'en suit $E_0 = m v^2$, et dès lors au moins deux lagrangiens C peuvent donner ce résultat :

$$C = C_0 + \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{et} \quad C = C_0 + E_0 \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) \quad (50)$$

En tout état de cause nous avons vu précédemment que toute mesure d'une variable physique quelconque est la succession d'intervalles bijectif, qu'il s'agisse de la température, de l'âge du capitaine ou de la vitesse. À chaque variable qu'on choisit d'étudier doit correspondre un lagrangien C , et dans le cas particulier d'une étude cinématique physique, ce lagrangien possède

la dimension d'une énergie au sens physique du terme. Il nous est donc permis d'étudier le module de la vitesse et de considérer son lagrangien fondamental :

$$C = C_0 + E_0 \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) \quad (51)$$

Ce cadre d'étude étant fixé, nous allons montrer qu'il nous mène à des relations intéressantes concernant la masse et la force de Lorentz, typique de l'électromagnétisme.

En dérivant ce lagrangien par rapport à la vitesse de l'axe X du référentiel, on doit obtenir l'impulsion P_x :

$$P_x = \frac{\partial C}{\partial \dot{x}} = \frac{E_0}{v^2} \dot{x} \quad (52)$$

Faisant la même opération pour les axes Y et Z on doit vérifier :

$$\mathbf{P} = \left(\frac{E_0}{v^2} \right) \mathbf{v} = m \mathbf{v} \quad \text{avec} \quad m = \frac{E_0}{v^2} \quad (53)$$

Le paramètre m est ici encore, non pas une propriété intrinsèque de la matière, mais seulement un raccourci mathématique. Si v est constante, alors m doit l'être aussi, comme nous l'avons déjà vu en une dimension, et dès lors seuls deux mouvements sont possibles : la translation uniforme et la rotation uniforme. En effet dérivant la masse par rapport au temps, en partant de sa définition (53), on obtient :

$$\dot{m} = -2m \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \quad (54)$$

Ainsi pour que cette dérivée soit nulle il n'y a que deux solutions : soit l'accélération est nulle (translation uniforme), soit l'accélération est perpendiculaire à la vitesse (rotation uniforme).

Partant de la définition (53) de l'impulsion, on voit que la force doit être définie par $\mathbf{F} = \dot{m} \mathbf{v} + m \mathbf{a}$ et tenant compte du fait que la masse puisse être variable selon l'équation (54), la force sera donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\xi} = -m \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = m \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{v})}{v^2} \quad (55)$$

Mathématiquement cette force est une force de Lorentz, c'est à dire de type électromagnétique, où $\boldsymbol{\xi}$ joue le rôle du champ électrique et \mathbf{H} celui du champ magnétique. Notons que le champ électrique ainsi défini peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v} \quad (56)$$

Il est donc nul si la masse est constante.

4.7 Superposition des intervalles bijectifs

Nous avons vu au chapitre 3 §3.6 qu'à l'intérieur d'un quantum de temps plusieurs états peuvent se superposer. Par exemple l'expérience des fentes de Young montre que si les deux fentes sont ouvertes, les passages à droite et à gauche sont simultanément possibles dans le même quantum de temps. En revanche si un des chemins nécessite 2 quanta de temps (mesure dans l'une des fentes) quand l'autre n'en nécessite qu'un seul, alors les figures d'interférence disparaissent, c'est à dire qu'il n'y a plus superposition des états. À l'intérieur d'un quantum de temps les états peuvent donc se superposer, mais seulement à la condition express qu'ils partagent tous ce même quantum de temps.

Bien évidemment la durée minimale d'un intervalle bijectif ne peut être qu'un quantum de temps. Ainsi dans ce quantum on pourra superposer plusieurs intervalles bijectifs, c'est à dire plusieurs états.

Par exemple pour un corps à masse constante, le mouvement dans chaque intervalle bijectif qui se superpose ne peut être qu'une translation ou une rotation uniforme, à cause de ce que nous avons montré au §4.6.5. Ainsi sa vitesse totale pourra toujours s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_{Ri} + \sum_{j=1}^M \mathbf{v}_{Tj} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_{Ri} + \mathbf{v}_T \quad (57)$$

où les \mathbf{v}_{Ri} sont des vitesses de rotation uniforme et les \mathbf{v}_{Tj} des vitesses de translation uniforme.

Nous verrons d'ailleurs que si $N = 1$ dans l'expression précédente, le mouvement élémentaire décrit est celui de Kepler, respectant ses trois lois. On notera aussi la similitude de cette expression avec la possibilité de décomposer toute courbe périodique en une somme de mouvements périodiques élémentaires, ainsi que le fait la série de Fourier.

Notons que dans le cas de l'expression 57 le lagrangien sera donné par :

$$\Delta C = E_0 \ln \left(\frac{\left\| \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_{Ri} + \mathbf{v}_T \right\|}{v_0} \right) \quad (58)$$

On le voit ici encore, cette expression est mathématiquement très similaires à celles qu'on rencontre en physique statistique avec la fonction de partition et l'énergie libre.

4.8 Succession d'intervalles bijectifs

Dans ce qui précède nous nous sommes focalisés uniquement sur les propriétés physiques à l'intérieur d'un unique intervalle bijectif, mais nous savons grâce à la loi des intervalles bijectifs (16) que toute trajectoire est composée d'une succession d'intervalles bijectifs. Dans chacun d'eux les équations du mouvement (20), (23), (29), (30), (31), (40), (42) et (44) restent va-

lables, en revanche les constantes E_0 , L_0 , Γ_0 , Σ_B et Σ_C doivent a priori être différentes dans des intervalles différents. En d'autres termes, pour étendre les équations que nous avons obtenues concernant un intervalle bijectif unique, il faut transformer ces constantes en des fonctions évoluant au cours du temps, au gré des intervalles bijectifs traversés. Ainsi en trois dimensions le passage d'un intervalle unique à une suite d'intervalles peut être résumée comme suit :

Intervalle bijectif unique	Succession d'intervalles bijectifs
$C = B + \Gamma_0$ $W + C = \Sigma_C$ $W + B = \Sigma_B$ $\Sigma_C = \Sigma_B + \Gamma_0$ $\mathbf{F} = -\nabla \mathbf{B}$ $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{a}$ $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = E_0$ $\mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}_0$	$C = B + \Gamma(t)$ $W + C = E_C(t)$ $W + B = E_B(t)$ $E_C = E_B + \Gamma$ $\mathbf{F} = -\nabla \mathbf{B}$ $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{a}$ $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = E(t)$ $\mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}(t)$

(59)

Dans ces expressions E , E_C , E_B , W et Γ ont bien sûr la dimension d'une énergie mais ne sont plus forcément des constantes au cours du temps, comme elles l'étaient dans un intervalle bijectif unique.

On peut noter ici que nous retrouvons la forme classique du lagrangien, constitué d'une partie cinétique (ne dépendant que de la vitesse) réduite d'une partie potentielle (ne dépendant que de la position) [ref LL&EL] :

$$\Gamma = C(v) - B(r) \quad (60)$$

On pourra vérifier que menant le calcul de variation sur Γ au lieu de B et C , on obtient les équations du mouvement classiques de la méthode de variation lagrangienne [ref LL&EL].

4.9 Universalité de la mécanique analytique

Ce que nous avons posé dans ce chapitre est littéralement fondamental. C'est en effet à partir des équations que nous avons obtenues qu'il sera possible de prévoir le mouvement keplerien, la structure de l'atome d'hydrogène, les équations de Maxwell, l'existence de la charge électrique ou encore les grandes lois de la thermodynamique, comme l'entropie de Boltzmann ou l'équilibre chimique par exemple. Bien sûr tout cela sans jamais poser de postulat. Ce qui suit dans ce travail n'est donc que la conséquence de ce chapitre consacré à la mécanique analytique.

Rappelons encore une fois que si nous nous appuyons sur l'aspect cinématique de la physique dans cette étude analytique, les équations que nous avons obtenues restent mathématiquement valables pour toute autre étude de physique non cinématique, comme une étude statistique par exemple. Dans ce cas la vitesse évoquée plus haut n'est plus de dimension mètre par seconde mais nombre de particules par seconde.

5 Mouvement keplerien

5.1 Introduction

Ce dont nous sommes absolument certains concernant la gravitation, c'est qu'elle se traduit toujours par le mouvement keplerien. Toute théorie de la gravitation consistera donc à prévoir l'existence de ce mouvement très particulier. Il existe actuellement deux théories de la gravitation ayant fait leur preuves, celle de Newton, postulant l'attraction universelle, et la relativité générale (RG) d'Einstein, postulant l'équivalence des accélérations gravitationnelle et mécanique. La seconde est plus satisfaisante car d'une part elle se réduit mathématiquement à la première pour des masses et des vitesses faibles, et d'autre part elle donne une explication de l'état d'apesanteur que ressent un orbiteur keplerien, ce que ne fait pas la première. Ces deux théories ont prouvé leur valeur expérimentalement, mais chacune possède des limites d'application. La théorie de Newton n'explique pas l'état d'apesanteur, ni la précession des orbites de Mercure, tandis que la RG a le plus grand mal à s'accorder avec la physique subatomique.

Comme nous ne pouvons pas utiliser de postulat dans le présent travail, nous ne pourrons malheureusement intégrer aucune de ces deux théories. En revanche les résultats que nous avons obtenus en mécanique analytique vont nous permettre d'ouvrir une troisième voie : la justification du mouvement keplerien par la simple cinématique.

5.2 Lois de Kepler

Considérons un corps de masse constante, nous avons vu au §4.7 que sa vitesse ne peut être qu'une superposition de vitesses de rotation uniformes et de vitesses de translation uniformes. Il est donc particulièrement intéressant d'étudier le cas le plus simple où la vitesse est l'addition d'une seule vitesse de rotation uniforme et d'une seule vitesse de translation uniforme. Nous allons démontrer que pour un tel corps de masse constante sa cinématique respecte les trois lois de Kepler et son accélération est mathématiquement équivalente à l'accélération gravitationnelle de Newton.

Nous considérons donc que la vitesse \mathbf{v} est l'addition d'une vitesse de rotation uniforme \mathbf{v}_R et d'une vitesse de translation uniforme \mathbf{v}_T , toutes deux coplanaires. Mathématiquement on écrira :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_T$$

avec

- $\mathbf{v}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ et $v_R = \|\mathbf{v}_R\| = \omega r = \text{constante}$
- $\mathbf{v}_T = \text{constante}$

(61)

Dans cette expression $\boldsymbol{\omega}$ est la fréquence de rotation et \mathbf{r} le rayon vecteur reliant le centre de rotation à l'orbiteur, les caractères gras indiquent des vecteurs, et les caractères normaux indiquent des scalaires.

Attention, ici R signifie « rotation » et pas « radial », tandis que T signifie « translation » et pas « tangenciel ». La figure 4 représente \mathbf{v}_R et \mathbf{v}_T sur une ellipse keplerienne typique.

Une conséquence importante de cette équation cinématique coplanaire est que nous devons vérifier l'expression suivante :

$$\dot{\omega} r = -\dot{r} \omega \quad (62)$$

Munis de ces éléments nous pouvons calculer l'accélération \mathbf{a} de l'orbiteur qui est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps : $\mathbf{a} = \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} = -\frac{\omega}{r^2} \times (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}))$, et dans cette expression on reconnaît la définition du moment angulaire cinématique \mathbf{L} (à ne pas confondre ici avec le lagrangien) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (63)$$

Nous disons « moment angulaire cinématique » car ce moment angulaire ne contient aucune référence à la masse de l'orbiteur. R.H. Battin^[14] l'appelait « *massless momentum* ». Ceci étant posé l'expression finale de l'accélération pour ce système est :

$$\mathbf{a} = -\frac{L v_R}{r^3} \mathbf{r} \quad (64)$$

On voit que l'accélération est colinéaire au rayon vecteur, c'est à dire que nous sommes dans un système à champ central, ce qui impose que le moment angulaire soit constant. Par suite le terme $L v_R$ de l'expression précédente est une constante, et on remarque alors que cette accélération possède la même structure mathématique que l'accélération gravitationnelle de Newton.

Observons maintenant que l'analyse vectorielle de ce mouvement nous indique que l'équation suivante doit être respectée :

$$\mathbf{v}_R \times \mathbf{L} = v_R^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{v}_T}{v_R^2} \right) \mathbf{r} \quad (65)$$

La version scalaire de cette expression est donc :

$$p = (1 + e \cos \theta) r \quad \text{avec} \quad p = \frac{L}{v_R} \quad \text{et} \quad e = \frac{v_T}{v_R} \quad (66)$$

Dans cette expression θ est l'angle que font entre eux les vecteurs \mathbf{v}_R et \mathbf{v}_T , c'est l'anomalie vraie. Ceci est simplement l'équation d'une ellipse de paramètre p et d'excentricité e .

Nous constatons donc que ce mouvement respecte la première loi de Kepler.

Notons au passage que l'excentricité peut s'exprimer comme un vecteur de la façon suivante :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}_T \times \mathbf{L}}{L v_R} \quad (67)$$

Remarquons maintenant ce que nous dit l'analyse vectorielle de la multiplication scalaire du rayon vecteur par la vitesse :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_T = r \dot{r} \quad \text{donc} \quad \dot{r} = v_T \sin \theta \quad (68)$$

Sachant ceci et dérivant l'expression (66) par rapport au temps, il est facile de montrer que la relation suivante est respectée :

$$L = p \ v_R = r^2 \dot{\theta} \quad (69)$$

Pour le démontrer il faut dériver $r = p/(1 + e \cos \theta)$ par rapport au temps et comparer avec (68).

Cette formulation du moment angulaire en fonction de la dérivée de l'anomalie vraie par rapport au temps est bien connue (c.f. Landau et Lifchitz), elle indique que la vitesse aréolaire $f = r^2 \dot{\theta}/2$ doit être constante car le moment est lui même constant.

Nous constatons donc que ce mouvement respecte aussi la seconde loi de Kepler.

Notons au passage la relation qui lie la fréquence de rotation à la dérivée de l'anomalie vraie par rapport au temps :

$$\dot{\theta} = \omega (1 + e \cos \theta) = \omega \frac{p}{r} \quad \text{soit} \quad r \dot{\theta} = p \omega \quad (70)$$

L'intégration de l'expression (69) par rapport au temps, sur une période T et en considérant une ellipse de demi grand axe a (à ne pas confondre ici avec l'accélération), est bien connue (c.f. Landau & Lifchitz), elle mène dans notre cas à écrire la relation suivante :

$$L \ v_R = 4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2} = k = \text{constante} \quad (71)$$

Nous vérifions donc que le cube du grand axe de l'ellipse est proportionnel au carré de la période de révolution.

Nous constatons donc que ce mouvement respecte aussi la troisième loi de Kepler.

Ainsi tout mobile dont la vitesse sera donnée par l'équation cinématique (61) respectera les trois lois de Kepler. Ce résultat n'est finalement pas étonnant car il a déjà été décrit dans la littérature, mais avec des approches différentes, tributaire du postulat de Newton, comme celle des représentations par hodographes par exemple ^[5-13].

5.3 Théorème de la cinématique keplerienne

Puisque nous avons démontré que l'équation cinématique (61) respecte les lois de Kepler, nous pouvons la poser comme un théorème :

Théorème de la cinématique keplerienne

Tout mobile dont la vitesse est l'addition d'une vitesse de rotation et d'une vitesse de translation, toutes deux coplanaires et de module constant, respectera les trois lois de Kepler. (72)

A priori tous les astres de l'univers respectent ce théorème dans leur mouvement, en tout cas c'est ce que nous montre la mesure. Les vitesses de rotation et de translation sont représentées sur la figure 4 pour une conique quelconque.

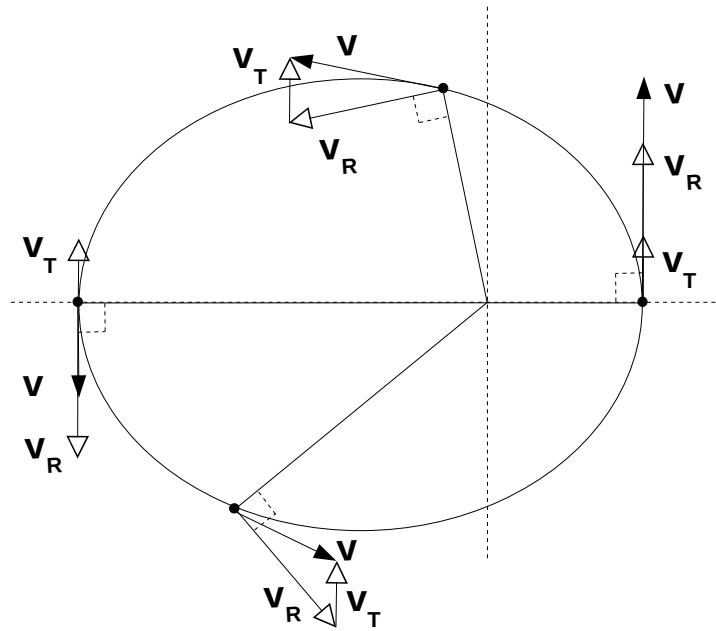


Figure 4 : représentation graphique des vitesses de rotation et de translation d'un orbiteur keplerien sur une conique quelconque.

5.4 Conséquences du théorème de la cinématique keplerienne

5.4.1 Lagrangiens, travail et énergies

Puisque la masse est constante la force agissant sur l'orbiteur vaut $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$, ce qui impose que l'impulsion vaut $\mathbf{P} = m \mathbf{v}$, et par suite un lagrangien solution est $C = m v^2/2$. Le travail quant à lui vaut $W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{1}{2} m v^2 = C$. Nous pouvons donc calculer l'énergie E_C du tableau (59) : $E_C = W + C = m v^2$.

Rapprochons maintenant l'accélération (64) de la relation (40), avec $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$, on voit trivialement que le lagrangien B doit être donné par :

$$B = -m \frac{k}{r} \quad (73)$$

Dès lors $E_B = W + B = \frac{1}{2} m v^2 - m \frac{k}{r}$ et $\Gamma = E_C - E_B = \frac{1}{2} m v^2 + m \frac{k}{r}$.

On voit que E_B est l'énergie mécanique classique tandis que Γ est le lagrangien classique [ref LL&EL]. Tout ceci est donc cohérent avec la mécanique classique.

Élevant la vitesse orbitale (61) au carré, il est facile de démontrer qu'on peut définir une énergie cinématique mécanique E_M telle que :

$$E_M = \frac{1}{2} v^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} v_R^2 (e^2 - 1) \quad (74)$$

En multipliant cette expression par la masse on obtient donc l'énergie E_B , s'est à dire l'énergie mécanique au sens classique du terme :

$$E_B = \frac{1}{2} m v^2 - m \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m v_R^2 (e^2 - 1) = m E_M \quad (75)$$

Par conséquent l'énergie mécanique est négative et reste constante tout au long de la trajectoire car $v_R^2 (e^2 - 1)$ est une constante, comme il est attendu en mécanique classique.

5.4.2 Principe d'équivalence de Galilée

L'équation (61) est cohérente avec le principe d'équivalence de Galilée qui stipule que les mouvements dans un champ de gravitation sont indépendants de la masse, et cela tout simplement parce que cette équation ne fait référence à aucune masse mais prévoit tout de même les lois de Kepler.

Il serait donc juste dorénavant de parler de loi d'équivalence de Galilée, plutôt que de principe (ou postulat) car la cinématique démontre la réalité de son existence.

5.4.3 Ionisation

L'ionisation pour les atomes est le fait d'éjecter un électron de son orbite autour du noyau atomique. Par analogie nous pouvons définir une énergie d'ionisation pour un orbiteur qui serait éjecté de son orbite fermée. Pour ce faire il est nécessaire que l'excentricité soit supérieure ou égale à 1 (trajectoire hyperbolique ou parabolique).

Selon l'équation (74) l'énergie cinématique pour un mouvement a excentricité nulle (mouvement parfaitement circulaire) est $E_M = -\frac{1}{2} v_R^2$, tandis que son énergie mécanique est nulle si l'excentricité vaut 1, soit $E_M = 0$. Par conséquent l'énergie nécessaire à éjecter l'orbiteur s'il est sur une trajectoire circulaire est

$$\Delta E = E_M' - E_M = \frac{1}{2} v_R^2 \quad (76)$$

C'est l'énergie d'ionisation.

5.4.4 Postulat d'attraction de Newton

Il est clair, tant pour la troisième loi de Kepler (71) que pour la forme mathématique de l'accélération (64), que la cinématique s'accorde au postulat de Newton à la condition suivante :

$$L v_R = GM = \text{constante} = k \quad (77)$$

Dans cette expression G est la constante universelle de la gravitation tandis que M est la masse du corps central, situé au foyer de l'orbite. Sans le savoir Newton a donc postulé que le terme cinématique $L v_R$ valait GM . On a pu constater expérimentalement la pertinence de ce postulat, à maintes reprises, mais nous ne pouvons pas ici le justifier plus que Newton, notre approche cinématique du mouvement keplerien étant indépendante de la masse. Pourquoi $GM=Lv_R$ reste donc une question non résolue.

Une autre chose doit être dite quant aux postulats de Newton. Ce dernier observant qu'une accélération de la forme mathématique (64) devait être à l'œuvre, il voit que l'accélération est de sens opposé à la direction du rayon vecteur. Il en conclut que c'est une accélération attractive, mais il ne peut pas le prouver de façon indubitable, ce qui aboutit finalement à énoncer le postulat d'attraction universelle. Il ne peut pas en effet prouver qu'une pomme attire la Terre, ni que la Lune attire la Terre. En revanche, si on utilise l'accélération (64) on peut effectivement expliquer le mouvement keplerien.

Procédant ainsi Newton oublie que le signe négatif de l'accélération (64) pourrait aussi provenir d'un autre genre de force : la force centripète. Et c'est bien ce que la cinématique nous dévoile, comme démontré ci-dessus. Ainsi la gravitation ne provoque pas l'attraction, mais la rotation.

5.4.5 Caractéristiques du mouvement

En posant la constante $k = L v_R$, il est possible de décrire les caractéristiques fondamentales du mouvement uniquement en fonction de k et de L :

$$v_R^0 = \frac{k}{L} \quad r_0 = \frac{L^2}{k} \quad \omega_0 = \frac{k^2}{L^3} \quad \text{avec } r_0 = p \quad \text{et } \omega_0 = \omega(r_0) \quad (78)$$

Dans cette expression p est le paramètre de la conique tandis que ω_0 est la valeur de la fréquence de rotation lorsque l'anomalie vraie vaut $\pm \pi/2$.

5.4.6 Niveaux d'énergie

Le mouvement keplerien est donc composé de deux vitesses, une de rotation, l'autre de translation. Conformément à la relation (42) il doit donc exister deux niveaux d'énergie correspondants, l'un de rotation E_R , l'autre de translation E_T :

$$E_R = m v_R^2 = m L \omega \quad \text{et} \quad E_T = m v_T^2 \quad (79)$$

où m est la masse de l'orbiteur. Puisque le module de chaque vitesse est constant ces niveaux d'énergie sont eux aussi constant, tant que la masse l'est aussi.

5.4.7 Chute des corps

Si à la surface de la Terre vous tenez une balle dans la main, la vitesse de cette dernière est nulle dans votre repère galiléen. Cette dernière doit néanmoins vérifier le théorème de la cinématique keplerienne (72). Cela nous indique que les vitesses de rotation et de translation doivent être de module égal mais de directions opposées : $\mathbf{v}_R = -\mathbf{v}_T$. La vitesse de rotation \mathbf{v}_R est provoquée par la gravitation de la planète, tandis que la vitesse de translation \mathbf{v}_T est provoquée par les frottements et autres contraintes qui empêchent la gravitation naturelle.

Laissons tomber la balle à terre. Ce faisant on diminue légèrement les contraintes empêchant la gravitation, c'est à dire qu'on a $v_T = (0,9999 \dots) v_R$, et par conséquent une excentricité de la conique proche mais inférieure à 1 : $e = v_R / v_T = 0,9999 \dots$. La trajectoire de la balle sera donc une ellipse dont le grand axe est beaucoup plus grand que le petit axe, comme représenté sur la figure 5.

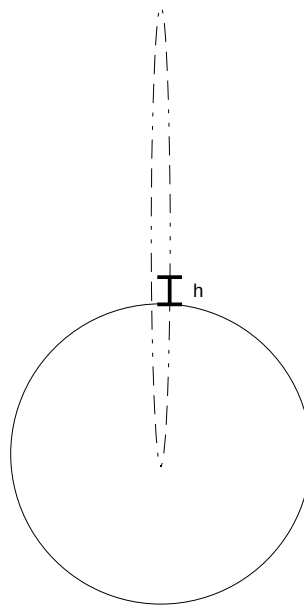


Figure 5 : chute d'un corps d'une hauteur h à la surface d'une planète. Localement il semble tomber en ligne droite mais en réalité sa trajectoire est une conique dont le foyer est le centre de gravité de la planète.

Bien sûr, entre votre main et le sol la balle semblera tomber en ligne droite, car la courbure de la conique est très faible sur cette courte distance, mais elle n'est pas nulle.

Ce que nous venons de décrire est typiquement l'expérience de pensée d'Einstein concernant un observateur dans un ascenseur. Si la cabine d'ascenseur est posée à la surface d'une planète, la trajectoire de la balle sera une conique, et si la cabine est translattée par un mécanisme, la trajectoire sera une ligne droite. L'observateur peut donc savoir s'il est posé à la surface d'une planète, ou tracté par une mécanique. Cela contredit le postulat d'Einstein, nous y reviendrons plus tard.

5.4.8 Superposition d'une accélération mécanique

Nous avons vu qu'un orbiteur keplerien libre subit une force dont la structure mathématique est celle de Newton. Que se passe-t-il lorsque cet orbiteur est muni d'un moteur fournissant une poussée mécanique ? Pour répondre à cette question étudions le cas le plus simple d'une orbite parfaitement circulaire, c'est à dire à vitesse de translation nulle dans la formule (61). Dans ce cas l'orbiteur subit deux accélérations, l'une due à la gravitation, l'autre mécanique due à la force engendrée par le moteur :

$$\mathbf{y} = \frac{-k}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}_M}{m} \quad (80)$$

où \mathbf{F}_M est la force de poussée du moteur et m la masse de l'orbiteur. Bien sûr l'intégration de cette expression par rapport au temps doit donner la vitesse qui doit respecter le théorème de la cinématique keplerienne (72), il s'en suit que l'intégration de l'accélération gravitationnelle donne la vitesse de rotation tandis que celle de l'accélération gravitationnelle donne la vitesse de translation :

$$\mathbf{v}_R = \int \frac{-k}{r^3} \mathbf{r} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_T = \int \frac{\mathbf{F}_M}{m} dt \quad (81)$$

Ces formules nous montrent clairement que la force mécanique ne peut provoquer qu'une vitesse de translation, mais en aucun cas une vitesse de rotation autour du foyer de l'orbite. Ceci est logique car une force doit avoir une connexion physique au centre de rotation pour provoquer une rotation, or le moteur de l'orbiteur n'en possède aucune. Au contraire la force de gravitation possède une telle connexion physique, c'est la gravitation elle-même, et elle peut donc provoquer une rotation.

On comprend donc que quelle que soit la force et la direction de la poussée du moteur l'orbiteur ne pourra pas rester sur sa trajectoire circulaire. La trajectoire se transformera en une ellipse car la vitesse de translation ne sera plus nulle, et par conséquent l'excentricité $e = v_T/v_R$ ne le sera pas non plus. C'est ce fait très particulier qui rend les trajectoires spatiales si complexes à calculer, et notamment les rendez-vous spatiaux.

Cette démonstration simple d'un orbiteur sur une trajectoire circulaire poussé mécaniquement montre à l'évidence que les accélérations gravitationnelles et mécaniques ne sont pas de même nature, qu'elles ne sont pas équivalentes. La première peut engendrer la rotation tandis que la seconde ne peut générer qu'une translation. Nous devons donc une nouvelle fois réfuter le postulat d'équivalence d'Einstein qui prétend exactement l'inverse.

5.4.9 Principe d'équivalence d'Einstein et relativité générale

À deux reprises, pour la chute des corps et pour les orbiteurs accélérés mécaniquement, nous avons démontré que le principe d'équivalence d'Einstein n'est pas correct. Or ce principe est la pierre angulaire de la relativité générale (RG). Est-ce donc à dire que la RG serait fautive ?

Nous avons déjà signalé l'intérêt de cette théorie à nos yeux : c'est la seule qui puisse expliquer de façon satisfaisante l'état d'apesanteur d'un orbiteur keplerien. En outre l'expérience a démontré toute la valeur de la RG aux échelles astronomiques. Par conséquent il nous faut être précautionneux avant de jeter cette théorie aux orties.

La non validité du principe d'équivalence ne prouve pas que la RG soit fausse, mais simplement qu'elle doit être bâtie sur une autre pierre angulaire, ce qui devrait l'améliorer encore et la rendre plus solide. N'oublions pas d'ailleurs que toute théorie scientifique embarquant un postulat doit être considérée comme inachevée et possédant un défaut. D'une façon ou d'une autre il faudra donc un jour poser ce problème sur la table.

Loin de disqualifier la RG notre physique sans postulat indique qu'elle doit simplement être fondée différemment. En outre nous verrons dans la suite de ce travail qu'un électron sur son orbite atomique peut ne pas émettre de rayonnement, alors qu'il est chargé et accéléré, à la condition qu'il soit effectivement dans l'état d'un orbiteur keplerien, c'est à dire en état d'apesanteur lui aussi. Le premier postulat de Bohr sur l'atome d'hydrogène n'en serait alors plus un, mais deviendrait une vérité physique démontrable.

Ce n'est donc pas à une disqualification de la RG que nous appelons, mais à sa refondation, et sans doute son extension en considérant que le proton courbe lui aussi l'espace-temps, ainsi que nous le verrons plus loin, à l'instar des corps massifs décrits en RG.

5.4.10 Rotation des galaxies

La théorie de Newton semble ne pas expliquer la rotation des disques galactiques mesurée expérimentalement. La figure 6 décrit l'écart entre la théorie et la mesure. À l'inverse la cinématique exposée précédemment peut en donner une explication simple.

Pour simplifier on considère que les étoiles orbitent circulairement autour du centre galactique. Dans ces conditions la troisième loi de Kepler nous donne la vitesse de l'étoile comme :

$$v = \sqrt{\frac{k}{r}} \quad \text{avec } k = GM \quad (82)$$

Où G est la constante gravitationnelle et M la masse du corps central, qui sont deux constantes. Cette formule montre donc que plus la distance au centre de rotation est grande et plus petite sera la vitesse, et ce qu'on s'attend à mesurer est donc la ligne A en pointillés de la figure 6.

Pour tant la mesure montre la ligne B de la figure 6. Il y a donc un problème.

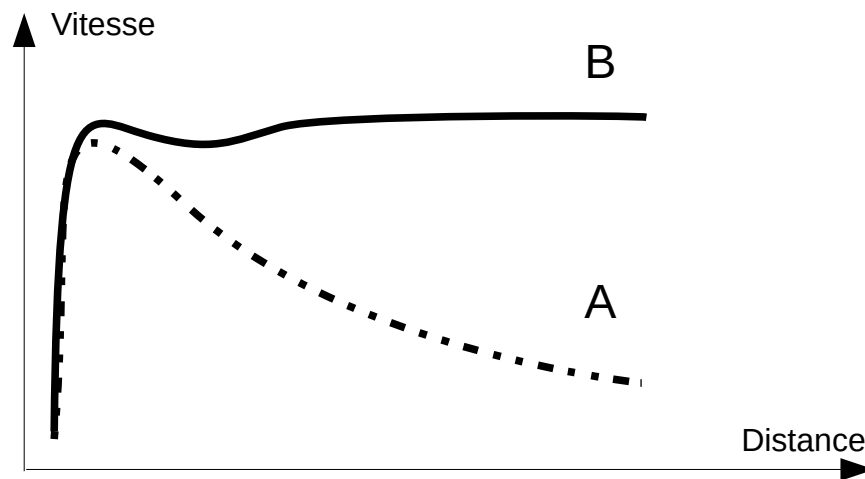


Figure 6 : vitesses des étoiles dans un disque galactique en fonction de leur distance au centre de celui-ci ^[16]. La courbe B est celle observée, la courbe A est celle attendue avec la théorie de Newton sans matière noire.

Une idée proposée pour résoudre ce dilemme est de postuler l'existence d'une matière dite noire, indétectable mais agissant comme la masse pour la gravitation. Mais pour parvenir à expliquer la mesure il est nécessaire que cette matière noire représente la plus grande partie de la masse de la galaxie, jusqu'à 75 %, tout en restant absolument indétectables par nos instruments.

Une autre idée est de postuler l'existence d'une accélération gravitationnelle faible, jusqu'ici insoupçonnée, et n'agissant qu'à grande distance (théorie MOND).

Nous ne pouvons pas bien sûr considérer ici ces deux propositions, car ce sont des postulats qui s'ajoutent à celui de Newton, et empiler les postulats les uns sur les autres jusqu'à expliquer l'expérience n'est pas une véritable démarche scientifique. Nous n'en avons pas besoin d'ailleurs puisque la cinématique quant à elle en donne une explication tout à fait satisfaisante.

En effet pour la cinématique $k = Lv$ (équation (71)), et la vitesse doit être donnée par :

$$v = \sqrt{L \omega} \quad (83)$$

Or $E = L\omega$ est le niveau d'énergie de rotation, que nous savons constant (équation (79)). Ainsi la vitesse doit être constante, indépendamment de la distance, et c'est bien ce que montre la courbe expérimentale B de la figure 6. Nul besoin de postulat, la cinématique explique bien le phénomène. Les étoiles du disque galactique peuplent le même niveau d'énergie et possèdent donc la même vitesse, comme le feraient des électrons peuplent la même orbitale atomique ou moléculaire, principe d'exclusion de Pauli en moins.

6 Atome d'hydrogène keplerien

6.1 Introduction

Nous savons aujourd'hui grâce à la mesure que l'hydrogène représente plus de 75 % de la masse visible de l'univers. À l'évidence comprendre sa structure et son fonctionnement est dès lors fondamental pour percer le mystère des lois dirigeant l'univers physique. L'hydrogène est l'atome le plus simple car il ne possède qu'un seul proton et un seul électron, mais il reste en grande partie incompris, car le monde des atomes semble ne pas ressembler à celui des objets macroscopiques que nous croisons au quotidien.

On sait aujourd'hui que sa structure est bien décrite par le modèle de Niels Bohr, malheureusement ce dernier impose trois postulats :

- il existe des orbites circulaires stables pour l'électron, sur lesquelles il ne rayonne aucune énergie,
- l'électron peut passer d'une orbite stable à une autre en absorbant ou en émettant un photon d'énergie $h\nu$, où h est la constante de Planck et ν est la fréquence du photon,
- la quantification des niveaux d'énergie découle de la quantification du moment cinétique de l'électron dans son mouvement orbital.

Le premier postulat résout un problème posé par le modèle atomique planétaire de E. Rutherford. Ce dernier proposait que l'électron se comporte autour du proton comme une planète le fait autour du soleil. Mais cela posait un problème, en effet l'électron étant doté d'une charge électrique tout mouvement de rotation possède une accélération centripète, or on sait que toute charge accélérée doit rayonner de l'énergie. Ainsi avec le modèle de Rutherford l'électron devait rayonner de l'énergie et spiraler vers le proton, ce qui est très loin de garantir la stabilité de l'atome d'hydrogène telle que nous l'observons. Le postulat de Bohr tranche cette question sans la résoudre, par une hypothèse énonçant qu'il doit exister des orbites sur lesquelles l'électron ne rayonne pas. Bohr ne peut pas prouver ce qu'il avance, mais il nous demande de le croire et de le juger sur le résultat.

Pourtant si l'électron se comporte comme une planète, ou comme des astronautes dans la station spatiale internationale (ISS) en orbite autour de la Terre, force est de constater que dans leurs référentiels la planète et les astronautes sont en chute libre, et donc en état d'apesanteur. Ils ne subissent aucune accélération. Pourquoi en irait-il différemment pour l'électron ? Si l'électron se comporte bien comme un orbiteur keplerien, ce qui est finalement la proposition de Rutherford, il ne doit ressentir aucune accélération et ne doit donc rayonner aucune énergie.

Par conséquent si nous parvenons à montrer que le mouvement de l'électron est bien keplerien, le postulat de Bohr n'en sera plus un. C'est ce que nous allons proposer dans ce chapitre.

Il faut cependant faire ici une remarque importante. Comme nous l'avons évoqué plus haut, la théorie de la relativité générale d'Einstein (RG) est la seule à pouvoir expliquer l'état d'ape-

santeur de façon satisfaisante. Pour cela il propose que tout orbiteur keplerien soit dans un référentiel galiléen, ne subissant aucune force et donc en apesanteur, mais que l'espace-temps se courbe pour lui faire adopter une orbite keplerienne, cette courbure étant provoquée par la masse du corps au foyer de l'orbite. Dès lors si l'électron est aussi en apesanteur, il faudra en déduire que le proton est capable de courber l'espace-temps autour de lui comme le fait le soleil par exemple pour capturer les planètes. Cela pousse à envisager que la RG soit encore bien plus générale que ce que nous pensions jusqu'ici, et qu'elle ne s'applique pas simplement aux échelles astronomiques mais aussi subatomiques.

6.2 Caractéristiques kepleriennes

Considérant un mouvement circulaire de l'électron autour du proton, et validant les équations (78), nous écrivons la vitesse, la position et la fréquence de la manière suivante :

$$v_R^0 = \frac{k_0}{L_0} \quad r_0 = \frac{L_0^2}{k_0} \quad \omega_0 = \frac{k_0^2}{L_0^3} \quad (84)$$

Dans cette expression L_0 est le moment angulaire cinématique minimal, le *massless momentum*, et pour l'électron il doit valoir :

$$L_0 = \frac{\hbar}{m_e} = 1,157 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (85)$$

Dans cette expression \hbar est la constante de Planck divisée par 2π , et m_e est la masse de l'électron.

Quant à k_0 , c'est la constante de Coulomb pour un seul proton et un seul électron, dont nous ne connaissons pas la valeur a priori, puisque jusqu'ici dans ce travail la notion de charge électrique n'a pas été démontrée.

Les paramètres cinématiques v_R^0 , r_0 et ω_0 sont ceux de l'électron dans son mouvement circulaire le plus élémentaire, non excité. Nous ne connaissons pas leur valeur a priori, mais il y a un moyen de les obtenir : grâce à l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

Nous avons vu au paragraphe Error: Reference source not found que l'énergie cinématique d'ionisation vaut $\Delta E = v_R^2/2$ pour un mouvement keplerien, et cette énergie doit correspondre à un photon d'énergie $E_\phi = m_e \Delta E = h \nu = 1312.0 \text{ kJ mol}^{-1}$, valeur mesurée expérimentalement, ce qui mène à une fréquence $\nu = 3.288 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$. Sachant que le niveau d'énergie cinématique de rotation d'un orbiteur keplerien en mouvement circulaire est

$E_0 = v_R^2 = L \omega$, on doit avoir $E_0 = 2 \Delta E$, et par suite la fréquence de rotation doit être le double de la fréquence d'ionisation, soit :

$$\omega_0 = 4 \pi \nu = 4.142 \cdot 10^{16} \text{ Hz} \quad (86)$$

Il est alors simple d'obtenir les autres caractéristiques des équations (84) :

$$\begin{aligned}
\text{Rayon de l'orbite : } L_0 = r_0^2 \omega_0 \quad \text{donc } r_0 &= \sqrt{\frac{L_0}{\omega_0}} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\
\text{Vitesse : } v_R^0 = r_0 \omega_0 &= 2.189 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1} \approx c/137 \quad (c = \text{vitesse de la lumière}) \\
\text{Constante keplerienne : } k_0 = L_0 v_R^0 &= 253.27 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}
\end{aligned} \tag{87}$$

On reconnaît la valeur r_0 du rayon de Bohr et celle bien connue de la vitesse de l'électron de l'hydrogène. On pourra aussi vérifier que la constante keplerienne ainsi calculée vaut bien la constante de Coulomb divisée par la masse de l'électron : $k = 253.27 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} = \frac{k_c}{m_e}$.

Considérant le rapport entre la vitesse de l'électron et la vitesse de la lumière, $\alpha = v/c$, et utilisant les relations (84), on arrive aisément à décrire la constante de structure fine α proposée par A. Sommerfeld :

$$\alpha = \frac{v}{c} = \frac{L v}{L c} = \frac{k}{L c} = \frac{k_c}{\hbar c} \tag{88}$$

On note au passage que la constante de Coulomb k_c est aussi donnée par l'expression suivante :

$$k_c = \hbar v \tag{89}$$

Pour autant cette dernière formule est toujours très éloignée de la forme usuelle de la constante de Coulomb, qui fait intervenir le carré de la charge électrique et la permittivité du vide. En effet pour l'instant nous n'avons pas introduit le postulat d'existence de la charge électrique, ce qui nous empêche d'utiliser cette notion, mais nous allons voir que, mieux que de postuler, il est possible de démontrer son existence, et même de calculer sa valeur grâce aux calculs déjà obtenus précédemment.

6.3 Apesanteur, relativité, charge et moment magnétique

Il a été largement prouvé expérimentalement que tout orbiteur keplerien évolue en état d'apesanteur. On le constate par exemple pour les astronautes dans la station spatiale. Cela signifie que pour ces derniers leur système de référence est purement galiléen, et pourtant tout observateur extérieur les verra orbiter autour de la Terre à une vitesse vertigineuse. À la surface de la Terre tout mouvement de rotation mécanique provoque une force centrifuge qui agit sur l'orbiteur, on se sert d'ailleurs de cette propriété physique dans les centrifugeuses. Mais rien de tel pour les astronautes de la station qui ne sont pas plaqués au parois de leur vaisseau spatial. La gravitation apparaît donc très étrange pour l'expérimentateur humain.

Pour expliquer cette particularité de la gravitation Albert Einstein a proposé que l'espace se courbe sous l'effet de la masse des corps. Cette idée s'est avérée très fructueuse car capable d'expliquer nombre de phénomènes observés par nos télescopes. Nous ne pouvons pas cependant adopter ici cette explication car elle nécessite un préalable postulé, or nous cherchons

une physique sans postulat. Ce que nous pouvons faire en revanche c'est appliquer la relativité restreinte. En effet l'observateur et l'orbiteur sont tous deux dans des référentiels galiléens, et dès lors les propriétés de l'espace de Minkowski doivent s'appliquer. Il ne s'agit ici en réalité que de poser le cadre spatio-temporel que nous utilisons en tant qu'observateur. Développons cela.

Nul n'a jamais mesuré un élément de l'univers ayant une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, notée c . Pourtant notre expérience sur la Terre nous montre que les vitesses s'additionnent simplement. Par exemple la vitesse totale d'un passager marchant à 3km/h dans un train allant à 50km/h, sera de 53k/h. Pourtant la mesure montre que cette additivité a une limite, celle de la vitesse de la lumière. Albert Einstein est parvenu à expliquer ce paradoxe grâce à l'utilisation d'un référentiel à 4 dimensions, 3 d'espace et 1 de temps. On parle d'espace de Minkowski. Dans un tel espace le carré de tout intervalle $ds = (d\mathbf{r}, ic dt)$ doit être identique dans tous les référentiels (i est le facteur imaginaire). On écrit :

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 - c^2 dt^2 = \text{constante} \quad (90)$$

Ainsi dans son référentiel en apesanteur l'astronaute de la station est immobile, donc pour lui $d\mathbf{r}=0$, tandis que pour l'observateur l'astronaute est en mouvement et donc $d\mathbf{r}_{\text{obs}} \neq 0$. Par conséquent on doit vérifier :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 = d\mathbf{r}_{\text{obs}}^2 - c^2 dt_{\text{obs}}^2 \quad (91)$$

Il est alors trivial de trouver la relation existant entre les écoulements du temps dans les deux référentiels :

$$dt_{\text{obs}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{obs}}^2}{c^2}}} \quad (92)$$

Cette relation est emblématique de la relativité restreinte. Elle n'est valable que pour deux référentiels galiléens. Par suite toute fréquence mesurée dans la station spatiale (le tic-tac d'une horloge) sera liée à la fréquence observée de l'extérieur par la relation suivante :

$$\omega_{\text{obs}} = \omega \sqrt{1 - \frac{v_{\text{obs}}^2}{c^2}} \quad (93)$$

Revenons maintenant à l'électron de l'atome d'hydrogène considéré comme un orbiteur keplerien. Ce dernier doit lui aussi être en état d'apesanteur, donc dans un repère galiléen, comme les astronautes de la station. La formule précédente de l'écoulement du temps doit donc s'appliquer. Lorsque la vitesse observée est relativement faible par rapport à celle de la lumière, la formule (93) peut être représentée par son développement limité au premier degré,

et dès lors pour l'observateur tout se passe donc comme si à la fréquence de l'électron était retranchée une fréquence relativiste :

$$\omega_{\text{obs}} \approx \omega - \omega_{\text{rel}} \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \frac{v_{\text{obs}}^2}{c^2} \omega \quad (94)$$

Par suite l'énergie observée $E_{\text{obs}} = \hbar \omega_{\text{obs}}$ sera décalée d'une énergie E_{rel} relativiste par rapport à l'énergie fondamentale $E_0 = \hbar \omega$:

$$E_{\text{obs}} = E_0 - E_{\text{rel}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \frac{v_{\text{obs}}^2}{c^2} E_0 \quad (95)$$

Donnons une représentation physique à cette énergie relativiste. Tout se passe comme si une force relativiste \mathbf{f}_{rel} apparaissait, qui provoque un travail ΔW_{rel} égal à l'énergie relativiste :

$$\Delta W_{\text{rel}} = \int_0^T \mathbf{f}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v} dt = E_{\text{rel}} \quad (96)$$

Dans cette hypothèse nous cherchons une solution simple de cette équation, par exemple vérifiant $\mathbf{f}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v} = \text{constante}$ pendant toute la période de révolution, et dans ce cas on aura :

$$\Delta W_{\text{rel}} = (\mathbf{f}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}) T = \frac{2\pi}{\omega} (\mathbf{f}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}) \quad (97)$$

Rapprochant cette expression de (95) on doit alors vérifier :

$$\frac{\mathbf{f}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{v}}{v_{\text{obs}}^2} = \frac{\omega}{4\pi} \frac{v_{\text{obs}}^2}{c^2} m_e \quad (98)$$

Il faut alors remarquer que l'expression précédente dans laquelle on applique les valeurs des relations (87) mène à la valeur de la charge électrique, non pas en coulomb mais en kilogramme par seconde :

$$e = \frac{\omega_0}{4\pi} \frac{v_0^2}{c^2} m_e = 1.602176 \cdot 10^{-19} \text{ kg s}^{-1} \quad (99)$$

Par conséquent tout se passe comme si la force relativiste valait :

$$\mathbf{f}_{\text{rel}} = -e \mathbf{v} \quad (100)$$

Ainsi la charge électrique apparaît non pas comme une propriété intrinsèque de la matière, mais comme un effet relativiste. Soyons cependant prudents dans notre interprétation, en effet la seule réalité mesurable est l'énergie relativiste E_{rel} (équation (95)) et nous n'avons pas le droit de postuler qu'elle est en réalité le travail d'une force. Cependant un autre fait pousse à considérer que la force \mathbf{f}_{rel} puisse être une réalité physique : l'existence d'un moment magné-

tique découlant de cette force. En effet le moment $\boldsymbol{\mu}$ d'une force étant la multiplication vectorielle du rayon vecteur par la force, on a :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{\text{rel}} = -e \mathbf{r} \times \mathbf{v} = -e \mathbf{L} \quad (101)$$

Choisissant la valeur (85) de L on a donc :

$$\mu = \frac{e \hbar}{m_e} \quad (102)$$

Le moment magnétique associé à la force relativiste vaut donc 2 fois le magnéton de Bohr.

6.4 Quantification

D'une part, de ce que nous avons décrit plus haut pour l'aspect le plus élémentaire des systèmes physiques, la constante de Planck semble être le minimum d'action possible. Il est donc logique d'envisager que l'action d'un système moins élémentaire puisse être un nombre entier de fois ce quantum d'action :

$$L_n = n L_0 \quad (103)$$

Cette propriété a d'ailleurs été maintes fois constatée expérimentalement dans le monde subatomique. Le troisième postulat de Bohr peut donc être considéré désormais comme une loi empirique.

D'autre part, nous savons que les noyaux d'atomes possèdent toujours un nombre entier Z de protons et dès lors un électron dans leur orbite subira Z fois l'action d'un seul proton. Il s'en suit que la constante keplerienne k doit prendre les valeurs suivantes :

$$k_z = Z k_0 \quad (104)$$

Le pendant des relations (84) en considérant ces deux quantification sera alors

$$v_{zn}^0 = \frac{Z}{n} v_R^0 \quad r_{zn} = \frac{n^2}{Z} r_0 \quad \omega_{zn} = \frac{Z^2}{n^3} \omega_0 \quad (105)$$

Telles seront les caractéristiques cinématiques possibles d'un unique électron orbitant autour d'un noyau contenant Z protons.

6.5 Énergie

Les niveaux d'énergie cinématique possibles seront quant à eux donnés par :

$$E_{zn} = \frac{Z^2}{n^2} E_0 = \frac{Z^2}{n^2} v_R^{02} \quad (106)$$

L'énergie de transition nécessaire pour passer d'un niveau d'énergie à un autre, autour du même noyau sera donc donnée par

$$\Delta E_{Z n_1 n_2} = Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) E_0 \quad (107)$$

C'est effectivement ce qui est constaté expérimentalement sur les spectres d'absorption/émission de l'atome d'hydrogène, et des autres ions à un seul électron, à la condition que l'énergie E_0 soit l'énergie mécanique, c'est à dire l'énergie d'ionisation. Le second postulat de Bohr peut donc être considéré désormais comme une loi empirique.

6.6 Ionisation des atomes

Dans le cas où un atome possède plusieurs électrons, le problème devient plus complexe car il faut tenir compte des interactions des électrons entre eux, or jusqu'ici nous n'avons pas abordé cette question dont la réponse reste donc une inconnue. On peut tout de même avancer que le facteur Z/n sera fondamental et c'est bien ce qu'on peut observer expérimentalement en étudiant les énergies d'ionisation des atomes. La figure 7 fait état des mesures d'ionisation des atomes en présentant en abscisse le nombre de proton et en ordonnée la valeur de la racine carrée du rapport entre l'énergie mesurée pour un atome quelconque et l'énergie d'ionisation de l'hydrogène : $\Psi_{ZN} = \sqrt{E_{ZN}/E_{11}}$, où E_{ZN} est l'énergie d'ionisation de l'atome à Z protons et N électrons, et E_{11} celle de l'hydrogène.

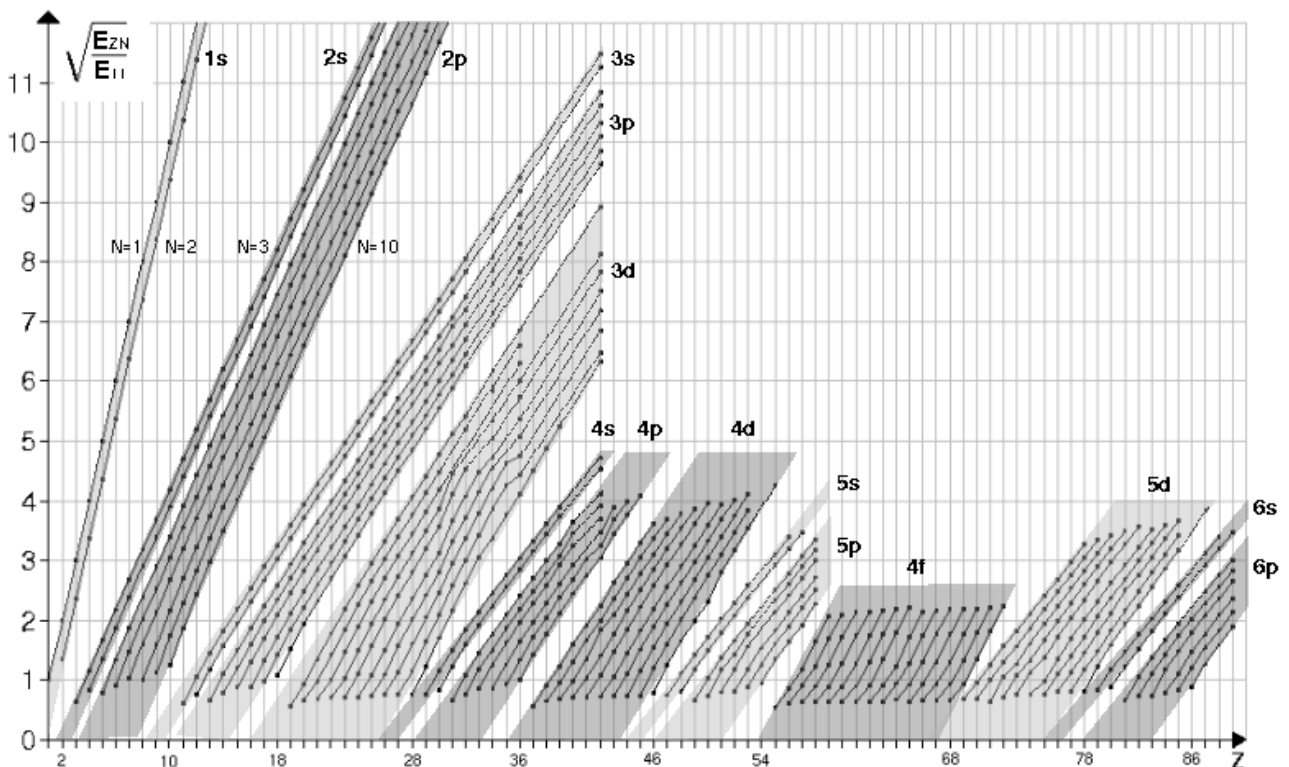


Figure 7 : racine carrée du rapport de l'énergie d'ionisation des atomes à Z protons et N électrons sur l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, en fonction du nombre Z de protons^[17-22].

On voit qu'en première approximation on obtient des droites dont l'équation est :

$$\Psi_{ZN} \approx \frac{Z}{n} - f(N, n, l, m, s) \quad (108)$$

Dans cette expression la fonction f donne l'ordonnée à l'origine des quasi droites, mais nous n'avons aucune information sur elle. Cependant on voit que les énergies d'ionisation des atomes se répartissent selon l'ordonnement typique des harmoniques sphériques. On distingue en effet des couches avec la même pente, composées de sous couches s , p , d , f , etc, elles mêmes décomposables en deux parties, exactement comme dans le cas d'harmoniques sphériques qui sont les vibrations possibles d'une onde sphérique. On peut donc supposer que la fonction f dépendra de N et des nombres quantiques n , l , m et s définis par les solutions des harmoniques sphériques.

Notons enfin que quelles que soient les valeurs de Z , N ou ψ , l'énergie E_{11} c'est à dire l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, reste la référence énergétique de tous les atomes qui en gardent structurellement la trace.

7 Approche par le champ, électromagnétisme

7.1 Introduction

Jusqu'ici nous avons eu une approche cinématique et donc « corpusculaire » des systèmes. Implicitement nous avons supposé qu'ils sont indépendant de l'espace-temps dans lequel ils évoluent, comme des acteurs d'une pièce de théâtre dont la scène est l'espace-temps. Cette approche est fructueuse car elle nous permet de prévoir nombre de mesures vérifiées expérimentalement. Mais elle n'est pas suffisante,

Par exemple en considérant que les systèmes sont des particules de masse constante, comme les orbiteurs keplériens, nous avons pu déterminer que seulement deux mouvements élémentaires leur étaient permis, la rotation et la translation uniformes. Considérer le cas d'une masse constante nous est permis car l'expérience confirme pleinement son existence dans le monde classique macroscopique. Ce n'est pourtant pas suffisant car ce n'est qu'une solution possible parmi d'autres. Ils ne nous est pas permis de considérer que tous les systèmes naturels sont ainsi des particules à masse constante, sauf à émettre un postulat.

Il nous faut donc explorer d'autres représentations mathématiques possibles qui donneraient le même résultat lors de la mesure que la description corpusculaire que nous avons utilisée jusqu'ici. Or nous avons vu précédemment que les particules microscopiques sont promptes à exposer des propriétés ondulatoires, par exemple à l'intérieur des quanta de temps ou dans la constitution des atomes avec la répartition en harmoniques sphériques de leurs niveaux d'énergie. Il apparaît donc intéressant de développer une description ondulatoire des systèmes, en utilisant la notion de champ plutôt que celui de particule. Ainsi notre particule clas-

sique de masse constante en mouvement devient le signal d'un champ de masse se propageant dans l'espace-temps. Puisqu'il faut que la vision corpusculaire et la vision ondulatoire aboutissent au même résultat lorsqu'on opère la mesure, car ce ne sont que deux interprétations mathématiques différentes mais de valeur égale, il est nécessaire que les équations de la mécanique analytique précédente restent valables. En effet qu'on soit une particule ou un signal ondulatoire, il faudra toujours respecter les lois de non ubiquité et des intervalles bijectifs.

Dans ce chapitre nous explorerons cette représentation par le champ plutôt que le corpuscule.

7.2 Caractéristiques du champ

Les lois empiriques d'ubiquité et des intervalles bijectifs doivent toujours être valables si on choisit une représentation par le champ, puisque ce sont des lois vérifiées expérimentalement. Il s'en suit que la relation (42) doit toujours être vérifiée. En revanche il faut y remplacer les termes mathématiques corpusculaires par des termes mathématiques de champ, dépendant de l'espace et du temps. Dans ce cadre la quantité de mouvement ne dépendant que de la vitesse, $\mathbf{P}(\mathbf{v})$, doit être remplacée par un champ vectoriel d'impulsion $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ de même dimension (le kg m s^{-1}) mais dépendant de l'espace et du temps :

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (109)$$

Il en va de même pour l'énergie E_0 qui doit être remplacée par un champ de potentiel V de même dimension ($\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$) dépendant de l'espace et du temps :

$$E_0 \Rightarrow V(\mathbf{r}, t) \quad (110)$$

Rappelons aussi que la loi des intervalles bijectifs nous indique qu'il doit toujours exister une représentation mathématique de la vitesse en fonction unique du temps : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$.

Nous arrivons donc à écrire l'équivalent de la relation (42) pour le champ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(t) = V(\mathbf{r}, t) \quad (111)$$

Nous allons voir que cette relation nous donne accès aux lois fondamentales de l'électromagnétisme.

7.3 Force de Lorentz

Nous savons que la force est définie comme la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps : $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$. Remplaçant \mathbf{P} par \mathbf{A} on doit donc avoir :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (112)$$

Dans cette expression ∇ est l'opérateur gradient de l'analyse vectorielle.

D'un autre côté le gradient du potentiel V doit être le gradient du produit du champ \mathbf{A} par la vitesse \mathbf{v} , conformément à l'a relation (111), c'est à dire qu'on doit vérifier :

$$\nabla V = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{P} \quad (113)$$

Joignant les deux expressions précédentes on doit finalement obtenir la force sous la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \times (-\text{rot } \mathbf{A}) \quad (114)$$

On reconnaît ici la force de Lorentz qui est le fondement de l'électromagnétisme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

avec

$$\mathbf{E} = \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{est le champ électrique} \quad (115)$$

$$\mathbf{B} = -\text{rot } \mathbf{A} \quad \text{est le champ magnétique}$$

Dans cette expression E est le champ électrique et ne doit pas être confondu avec l'énergie pour laquelle nous avons utilisé le même symbole précédemment.

7.4 Équations de Maxwell et jauge

À partir des expressions des champs électrique et magnétique (115) il est immédiatement possible de vérifier qu'on doit avoir :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (116)$$

Ces dernières expressions sont le premier couple des équations de Maxwell.

L'établissement du second couple des équations de Maxwell est un peu plus compliqué que celui du premier couple. Il nous faut obtenir l'expression du rotationnel du champ magnétique d'une part, et de la divergence du champ électrique d'autre part.

Commençons par calculer le rotationnel du champ magnétique :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \Delta \mathbf{A} - \nabla (\text{div } \mathbf{A}) \quad (117)$$

Dans cette expression l'opérateur Δ est le laplacien vectoriel. Introduisons maintenant

l'opérateur de d'Alembert appliqué au champ \mathbf{A} : $\square \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$, où c est la célérité

de l'onde, en remarquant aussi que $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla V) + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$, on peut alors écrire :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \square \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla J \quad (118)$$

Dans cette expression le scalaire J est défini par :

$$\mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (119)$$

En ce qui concerne la divergence du champ électrique, on doit avoir :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \Delta V + \frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} = \square V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} \quad (120)$$

Soit encore, en utilisant la définition (119) de \mathbf{J} :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \square V + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (121)$$

Les expressions (118) et (121) forment en réalité l'équivalent du second couple des équations de Maxwell avec notre représentation du champ, mais seulement à la condition que les termes en \mathbf{J} soient nuls. Ceci est évidemment toujours possible si \mathbf{J} est lui même nul, soit :

$$\mathbf{J} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (122)$$

Cette expression est bien connue, c'est la condition de jauge de Lorentz. Elle a été maintes fois vérifiée expérimentalement. Elle se réduit à la jauge de Coulomb lorsque le potentiel V ne dépend pas du temps. Nous verrons plus loin qu'elle justifie l'existence de la charge électrique.

En considérant que la condition de jauge est satisfaite, le second couple des équations de Maxwell sera finalement donné dans notre démonstration par :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \square \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \square V \end{aligned} \quad (123)$$

Toujours en considérant que la jauge est bien nulle, il est aussi possible d'écrire un troisième couple d'équations qui nous mène à une description très ondulatoire du champ électromagnétique. Pour cela nous calculons $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}$ et $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ pour obtenir trivialement :

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E} &= \nabla (\square V) + \frac{\partial (\square \mathbf{A})}{\partial t} \\ \square \mathbf{B} &= -\operatorname{rot} (\square \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (124)$$

Ces équations correspondent aux définitions des champs électrique et magnétique (115), où chaque paramètre physique est remplacé par son d'Alembertien. Elles sont particulièrement utiles pour montrer que si le potentiel V et le champ de quantité de mouvement \mathbf{A} sont des ondes, qui vérifient donc les équations homogènes $\square V = 0$ et $\square \mathbf{A} = \mathbf{0}$, alors les champs électriques et magnétiques ne peuvent être que des ondes eux aussi : $\square \mathbf{E} = \mathbf{0}$ et $\square \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Cette solution mathématiquement possible pour les champs V et \mathbf{A} nous indique une piste pour expliquer les structure ondulatoires des atomes et du monde microscopique que nous avons rencontrées précédemment (fentes de Young, ionisation des atomes).

Rien n'empêche cependant que le potentiel vecteur et le champ d'impulsion réponde à des équations d'Alembertiennes inhomogènes de type $\square V = f(\mathbf{r}, t)$ ou/et $\square \mathbf{A} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$. C'est d'ailleurs ce qui doit pouvoir advenir pour que les équations (123) vérifient exactement le second couple des équations de Maxwell lorsqu'une densité de charge existe. Cependant pour l'instant nous n'avons pas démontré l'existence de la charge électrique, c'est pourquoi les équations (124) ne sont pas strictement équivalentes au second couple des équations de Maxwell, mais généralisées.

7.5 Pour aller plus loin

Il serait nécessaire de pousser beaucoup plus loin l'approche par le champ que ce que nous avons fait ici. Cela impose une conception tout autre de la matière. Par exemple dans cette description les particules seront des signaux, donc décomposables en leur série de Fourier, dont les composantes ondulatoires pourront avoir la célérité de la lumière mais la vitesse de groupe du signal sera la vitesse cinématique de la particule. Ainsi les particules ne seraient que des amas de photons dont la trajectoire est courbée dans l'espace-temps, comme proposé en relativité générale mais à une autre échelle. Mais tout ceci n'est que spéculation car nous n'avons aucune piste quant à cette relativité générale étendue. Tout simplement pouvons nous souligner que des investigations dans ce domaine seraient nécessaires.

8 Thermodynamique

8.1 Introduction

Jusqu'ici nous avons eu une approche très cinématique des systèmes, nous intéressant avant tout à leur vitesse, leur position ou leur accélération. Nous avons cependant expliqué dans le chapitre sur la mécanique analytique qu'un lagrangien doit pouvoir être associé à toute grandeur mesurable, cinématique ou pas.

Or la thermodynamique n'utilise pas, ou peu, les propriétés cinématique des particules, car elle préfère manipuler des volumes, des températures, des nombre de particules dans un état donné, et bien d'autres paramètres difficilement déductibles des seuls paramètres cinématiques.

Nous allons voir ici comment il est possible de retrouver les lois fondamentales de la thermodynamique à partir de notre étude précédente de mécanique analytique.

8.2 Énergie libre de Gibbs et entropie de Boltzmann

Considérons un système composé d'un grand nombre N de particules réparties en de nombreux états physiques. Nous noterons q_n le nombre de particules dans l'état d'énergie E_n , et simplement q le nombre total de particules. Les nombres des particules dans chaque état pouvant varier dans le temps, il est possible de calculer les dérivées \dot{q}_n et \dot{q} :

$$q = \sum_0^N q_n \quad \text{donc} \quad \dot{q} = \sum_0^N \dot{q}_n \quad (125)$$

Conformément à la formule (63) il est donc possible d'écrire :

$$\dot{q} = \sum_0^N \dot{q}_n^0 e^{\frac{\Delta C_n}{E_{n0}}} \quad (126)$$

Ainsi en divisant cette expression par une constante \dot{q}_0 on peut définir une fonction de partition Z sans dimension :

$$Z = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} = \sum_0^N \frac{\dot{q}_n^0}{\dot{q}_0} e^{\frac{\Delta C_n}{E_{n0}}} \quad (127)$$

Finalement en rapprochant ce résultat de la formule (62), on obtient l'expression de l'énergie libre de Gibbs, à condition que l'énergie E_0 vaille $E_0 = k T$ où k est la constante de Boltzmann et T la température :

$$\Delta C = E_0 \ln(Z) \quad \text{avec} \quad E_0 = k T \quad (128)$$

Bien sûr en divisant l'énergie libre par la température on obtient l'entropie $S_{\text{ent}} = \Delta C/T$ telle que décrite par Boltzmann :

$$S_{\text{ent}} = k \ln(Z) \quad (129)$$

8.3 Équilibre chimique

Considérons un mélange chimique de deux réactifs A et B en équilibre chimique avec deux produits C et D :



Le lagrangien totale sera la somme des lagrangiens des réactifs moins la somme des lagrangiens des réactifs, soit :

$$\Delta C = c \Delta C_C + d \Delta C_D - a \Delta C_A - b \Delta C_B \quad (131)$$

Puisque chaque élément chimique possède sa propre fonction de partition Z sur le modèle de la formule (127), on pourra aussi écrire :

$$\Delta C = E_0 \ln \left(\frac{Z^c Z^d}{Z^a Z^b} \right) \quad (132)$$

Si la réaction est à l'équilibre, alors ΔC est constant et le rapport des fonctions de partition aussi :

$$\frac{Z^c Z^d}{Z^a Z^b} = \text{constante} \quad (133)$$

C'est la condition bien connue de l'équilibre chimique.

8.4 Désintégration radioactives

8.4.1 Cinétique générale

La désintégration radioactive de noyaux atomiques suit une loi empirique simple. Si on note N_0 le nombre de noyaux non désintégrés au temps t_0 , ce nombre évolue dans le temps selon l'équation générale suivante :

$$N = N_0 e^{-\nu t} \quad (134)$$

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation (36) pour laquelle q est la quantité N .

8.4.2 Désintégration bêta

La désintégration bêta consiste en la désintégration d'un neutron en un proton et un électron, c'est à dire un atome d'hydrogène. Contrairement aux désintégrations alpha et gamma qui émettent des énergies spécifiques constantes, les désintégrations bêta émettent une énergie comprise entre 0 et une énergie maximum E_0 , égale à la perte de masse entre le neutron et l'atome d'hydrogène multipliée par la vitesse de la lumière au carré. L'équation (36) dans laquelle on pose $\alpha = 0$, $\nu t = -x$, $\rho = \pi/2$ et $\omega t = x$ simule très bien ce spectre particulier de la désintégration bêta comme représenté sur la figure 8.

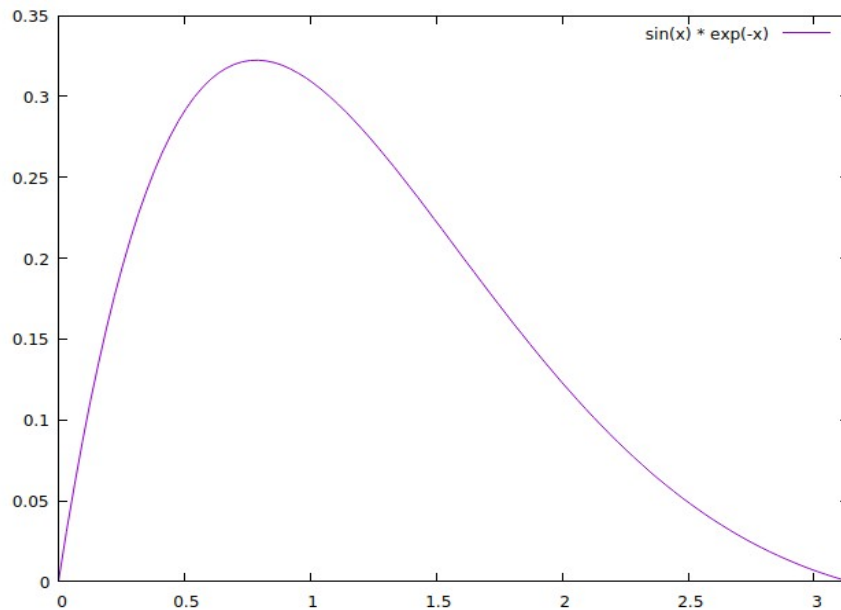


Figure 8 : Cas particulier de l'équation (36): $\sin(x)$ et $(-x)$ avec $x \in [0, \pi]$. Cette courbe correspond à celle d'un spectre de désintégrations bêta.

Rappelons que l'équation (36) est valable si le lagrangien est directement proportionnel au temps, (équation (34)) ainsi l'abscisse de la figure 8 peut représenter soit le temps, soit l'énergie. En choisissant le référentiel adapté le point d'abscisse $x=\pi$ de la figure 8 correspond à l'énergie E_0 de l'équation (34).

8.5 Cinétique chimique

Il a été maintes fois vérifié par l'expérience que les transformations chimiques, et même nucléaires, étaient caractérisées par des variations du nombre de particules dans un état donné dépendant d'une exponentielle du temps. Le cas des désintégrations radioactives en est un exemple emblématique.

L'équation (63) est capable de prédire cette propriété à la condition que le lagrangien ΔC soit simplement proportionnel au temps :

$$\Delta C = E_0 \nu \Delta t \quad (135)$$

où ν est une fréquence constante. Ceci est possible car nous avons vu que la loi des intervalles bijectifs impose que le lagrangien C puisse être décrit aussi uniquement en fonction du temps (voir les formules (17)). Ainsi dans ce cas simple d'un lagrangien seulement proportionnel au temps, le nombre de particules étudié doit satisfaire la relation suivante :

$$\dot{q} = \dot{q}_0 e^{\nu \Delta t} \quad (136)$$

Cette solution relate effectivement le comportement de nombre de systèmes chimiques en transformation comme l'expérience l'a montré.

8.6 Pour aller plus loin

Ici encore nous ne faisons qu'effleurer le vaste domaine de la thermodynamique et il faudrait en réalité aller beaucoup plus loin.

9 Conclusion

Envisageant que les postulats fondateurs de différentes théories de physique actuelles (mécanique classique, mécanique quantique, relativité générale, ...) pourraient être la cause de leur difficulté à coopérer entre elles, nous avons proposé ici une nouvelle démarche qui puisse toutes les intégrer, en les dénaturant le moins possible, dans un socle théorique unique, et libre de tout postulat car la science les refuse en toute rigueur.

Établir un tel socle semblait au premier abord utopique, mais nous voulions essayer quand même. Finalement, en y regardant de plus près cela nous est apparu relativement facile. En effet nous n'avons pas fait grand-chose, nous avons simplement posé deux lois empiriques, la loi de non ubiquité (2), et la loi des intervalles bijectifs (16), puis nous avons seulement déroulé leurs conséquences mathématiques.

Bien sûr si ces lois étaient fausses, tout le reste le serait aussi, et le présent travail serait un objet étrange, totalement faux mais logique et en complet accord avec les résultats expérimentaux. En réalité force est de constater qu'aussi loin ou en détail que nous ayons mesuré la nature, elles sont exactes. Ces deux lois sont patentes et évidentes mais pourtant aucune théorie de physique n'en avait fait des éléments fondateurs, aussi étrange que cela puisse paraître. À l'instar des lois de Kepler qui s'imposent à tous les astres de l'univers, les lois de non ubiquité et des intervalles bijectifs s'imposent à tous les paramètres physiques et sont donc relatives à une des structures les plus profondes de notre univers physique observable. Ne pas considérer leurs existences comme fondamentales serait comme considérer qu'on peut ignorer les lois de Kepler pour expliquer la gravitation.

Une fois ces lois posées tout le reste n'est qu'une analyse mathématique de leurs conséquences. Il n'y a rien d'autre, aucun postulat, aucune hypothèse indémontrable, seulement des équations mathématiques et leurs solutions particulières qui aboutissent à prévoir les grandes lois de physiques avérées expérimentalement.

Nous pensons donc avoir démontré la faisabilité et l'efficacité de notre démarche sans postulat. Il faut cependant rester modeste car le chemin que nous avons décrit ici est forcément un choix humain, donc subjectif, même s'il est entièrement démontré et démontrable. On peut envisager en effet d'autres chemins sans postulat, bâti sur d'autres lois, d'autres démonstrations mais aboutissant aussi à prévoir les résultats des mesures. Il faut rester ouvert à ce propos et donc bien comprendre que notre objectif ici n'est pas d'imposer une voie unique mais de laisser envisager qu'une démarche sans postulat n'est pas utopique, et bel et bien à portée de la main.

L'aspect général de notre théorie est très similaire à celui de la mécanique classique, et un de ses intérêts est donc sa simplicité mathématique. Pourtant nous avons démontré la structure quantique du monde et la nécessité d'utiliser la mécanique quantique et sa conception des systèmes, au moins à l'intérieur des quanta de temps.

Notre approche de la gravitation quantique est totalement cinématique et semble exclure la relativité générale (RG), mais ce serait nous avoir mal lu. Un des apports les plus cruciaux de la RG est d'expliquer l'état d'apesanteur des orbiteurs keplerien, ce qu'aucune autre théorie ne propose, pas plus la notre qu'une autre. Or nous avons besoin d'étendre cette propriété à l'électron si on veut qu'il soit lui aussi en apesanteur autour du proton, comme un satellite autour de la Terre. En effet l'étude de l'atome d'hydrogène nous montre comment son comportement, notamment spectroscopique, est expliqué par le mouvement keplerien de l'électron. Loin de la réfuter nous en appelons donc à une extension de la RG au niveau subatomique. C'est une voie de recherche qui devrait s'avérer des plus fructueuses. Notons au passage que nous avons démontré par la cinématique l'inexactitude du principe d'équivalence d'Einstein, ce qui laisse envisager que les fondements de la RG pourraient être améliorés, et donc pourquoi pas étendus.

Bien sûr pour tout faire tenir ensemble il faut parfois faire des concessions. Ainsi lorsque nous parvenons à prévoir l'existence de la charge électrique, et même à calculer sa valeur à partir de la constante de Planck, de la masse de l'électron et de l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, il nous faut bien observer que la charge électrique n'est plus un paramètre intrinsèque de la matière, au même titre que la masse par exemple, mais simplement la fréquence d'un signal de masse ondulatoire qui se propage dans l'espace-temps (ici encore la nécessité d'une RG subatomique se fait sentir). Par suite le coulomb devrait s'exprimer en kilogramme par seconde : $1C = 1 \text{ kg s}^{-1}$. Nous sommes tout autant surpris que le lecteur en observant ce résultat inattendu, mais il nous faut bien l'admettre puisqu'il est démontré logiquement et expérimentalement.

Nous aurions voulu entrer plus dans le détail de chaque domaine de la physique, et en explorer d'autres, mais ce travail était hors de portée tant il serait colossal. Nous nous sommes donc consacrés à bâtir seulement un socle, des fondations susceptibles d'accueillir les différents domaines de la physique. Cependant tout reste à bâtir sur ce socle, même si nous avons ébauché ici l'élévation de quelques murs.

Nous espérons que le présent travail saura susciter l'intérêt de la communauté scientifique pour une théorie de physique libre de tout postulat, qu'elle ressemble à ce que nous proposons ou pas.

10 Bibliographie

- 1) J.L. Lagrange, « Mécanique Analytique », 1788
- 2) L. Landau & E. Lifchitz, « Mécanique », Ed. Mir, Moscou, 1966
- 3) L. Landau & E. Lifchitz, « Théorie du champ », Editions Mir, Moscou, 1966
- 4) L. Landau & E. Lifchitz, « Mécanique statistique », Editions Mir, Moscou, 1984
- 5) W. R. Hamilton, The hodograph, or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, Proc. R. Ir. Acad. III , 344353 (1845).
- 6) H. Abelson, A. diSessa and L. Rudolph, Velocity space and the geometry of planetary orbits, Am. J. Phys. 43 , 579-589 (1975).
- 7) A. Gonzalez-Villanueva, H. N. Nunez-Yepez, and A. L. Salas-Brito, In velocity space the Kepler orbits are circular, Eur. J. Phys. 17 , 168-171 (1996).
- 8) T. A. Apostolatos, Hodograph: A useful geometrical tool for solving some difficult problems in dynamics, Am. J. Phys. 71 , 261-266 (2003).
- 9) E. I. Butikov, The velocity hodograph for an arbitrary keplerian motion, Eur. J. Phys. 21 (2000) 1-10
- 10) D. Derbes, Reinventing the wheel: Hodographic solutions to the Kepler problems, Am. J. Phys. 69 , 481-489 (2001).
- 11) R. H. Battin, An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, 1999, 3.3, 115
- 12) Karel F. Wakker, Fundamentals of astrodynamics, Institutional Repository Library, Delft University of Technology, 2015, 211-217
- 13) Pramod S. Joag, An Introduction to Vectors, Vector Operators and Vector Analysis, Cambridge University Press, 2016, 12.4.3, 473
- 14) R. H. Battin, An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, 1999, 11.7, 550
- 15) A Tonomura, J Endo, T Matsuda, T Kawasaki and H Ezawa 1989 Demonstration of single-electron build-up of an interference pattern American Journal of Physics 57 117-120
- 16) Rubin, V. C.; Thonnard, N. & Ford Jr., W. K., « *Rotational Properties of 21 SC Galaxies With a Large Range of Luminosities and Radii, From NGC 4605 ($R=4kpc$) to UGC 2885 ($R=122kpc$)* », The Astrophysical Journal, 238, , 471-487
- 17) Emsley in The Elements, Oxford University Press, Oxford, UK, 3rd edition, 1996.
- 18) D.R. Lide, (ed.) in Chemical Rubber Company handbook of chemistry and physics, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 75th edition, 1994.
- 19) J.A. Dean (ed) in Lange's handbook of chemistry, McGraw-Hill, New York, USA, 14th edition, 1992.

- 20) J.E. Huheey, E.A. Keiter, and R.L. Keiter in Inorganic Chemistry: Principles of structure and reactivity, 4th edition, HarperCollins, New York, USA, 1993.
- 21) G.W.C. Kaye and T.H. Laby in Tables of physical and chemical constants, Longman, London, UK, 15th edition, 1993.
- 22) NIST Atomic Spectra Database http://physics.nist.gov/cgi-bin/AtData/main_asp